Formalisering og diskusjon av en konsekvensetisk teori.

Morten Rognes

(1996)

(Utkast)

INNHOLD

§0 Innledning. 5
§1 Språket til teorien KET 1 8
§2 Aksiomer i teorien KET 1 11
§2.1 Aksiomer om tid. 11
§2.2 Generelle aksiomer om handlingsalternativer og mulige konsekvenser. 12
§2.3 Grunnleggende aksiomer om sannsynlighet. 13
§2.4 Aksiomer om etiske verdifunksjoner. 15
§2.5 Aksiomer om forventet verdi og vekt. 17
§2.5.1 Noen kommentarer til aksiomene om forventet verdi og vekt. 21
§2.6 Hovedaksiomene i teorien. 30
§2.7 En modifikasjon av KET1. Teorien KET2 35
§3 Vid konsekvensialisme. 36
§4 Teoremer i teorien KET 1 37

§4.1 Noen flere teoremer i teorien KET 1 som angår verdier 44
§4.2 En svakere verditeori 46
§5 Noen flere verditeoretiske prinsipper 61
§6 Om formen til mer spesielle verditeoretiske prinsipper. 61
§7 Angående endel egenskaper som har positiv verdi i seg selv. 62
§8 Noen formelle overveielser i forbindelse med de egenskapene som er nevnt ovenfor. 63
§8.1 Et eksempel. Fosterdrap og tortur. 64
§8.2 Verdien til fordelinger. 70
§9 Om muligheten av å definere forventet verdi. 83
§9.1 En generell formalisert definisjon av forventet verdi. 87
§10 Noen elementære satser om reelle tallfølger og rekker. 88
§11 Teoremer om S+ og S÷ 94
§11.1 Et eksempel som synes å vise at KET1 har visse motintuitive konsekvenser. 102
§12 Om visse verditeoretiske prinsipper. 107
§12.1 Et teorem i KET1+ 114
§13 Avslutning.

.....
119
Referanser
.....
122
Referanser
.....
123
APPENDIX I
.....
125
Et sammendrag av systemet ZFCu(L).
.....
126

§0 Innledning.

Endel bemerkninger bør fremsettes om hva man bør lese før man tar fatt på dette arbeidet. Vi forutsetter vanlige kunnskaper i predikatlogikk og mengdelære. Dette innebærer at leseren bør ha rimelig bra innsikt i de temaer som tas opp i Rognes [1]. En rekke standardlærebøker dekker det stoffet som det er nødvendig å ha kjennskap til. Det er også nødvendig at leseren er fullt fortrolig med Rognes [2] og Rognes [3] siden vi her fremlegger en teori som er en utvidelse av egenskaps-teorien E;3 som er fremlagt i det sistnevnte arbeid. Det vil også være en fordel om leseren er fortrolig med to andre arbeider av forfatteren, nemlig "En teori om handlinger og handlingsalternativer", Rognes [7]. I dette essayet utdypes adskillig begrepet handling og handlingsalternativ, og det fremsettes en formelt sett presis teori om disse begrepene som kan oppfattes som et supplement til de konsekvensetiske teoriene som presenteres i detalj her. Videre ville det være en fordel om leseren studerer arbeidet "Frihet og determinisme. Noen logiske betraktninger", Rognes [8]. I dette arbeidet tar vi opp frihetsproblematikken og spesielt spørsmålet om muligheten av å kunne velge fritt er logisk sett forenelig med et fullstendig deterministisk virkelighetsbilde.

I dette arbeidet har vi formalisert en familie av konsekvensetiske teorier. Den av disse teoriene som vi tar vårt utgangspunkt i kalles KET1.

Dette har blitt gjort fordi vi ønsker å undersøke disse teoriene, men også fordi vi tror det er viktig at det foreligger en klar formulering av teoriene. Det er altså til en viss grad interessant i seg selv å ha for seg helt eksplisitte formuleringer av dem. Såvidt jeg kan se har ingen tidligere formulert disse teoriene så eksplisitt som det gjøres her.

Det bør imidlertid sterkt understrekes at forfatteren ikke har gjort seg opp noen definitiv mening om riktigheten av disse teoriene. Det er mulig at en mer grundig diskusjon av dem vil avsløre at de er gale. Men det kan også være at det er umulig å avgjøre hvorvidt noen av dem er holdbare på noe som tilnærmelsesvis kan kalles et "objektivt" grunnlag. En hovedvanskelighet ved disse teoriene er at de udefinerte begrepene som inngår i dem kan virke uklare og subjektive. At endel av grunnbegrepene kan gi et slikt inntrykk er imidlertid noe disse teoriene har til felles med de aller fleste andre typer av etiske teorier. I seg selv representerer derfor ikke dette noe sterkt argument mot de konsekvens-etiske teoriene som formuleres og undersøkes i denne avhandlingen. Vi skal kommentere dette mer etterhvert.

Dette arbeidet tar for seg sider ved etisk teori som hovedsakelig er av en abstrakt, generell og logisk karakter. Man vil finne lite eller ingenting her om konkrete, praktiske problemer av etisk natur. Man kan i denne forbindelse tenke på etiske problemer som oppstår innen de såkalte omsorgsyrkene, man kan videre tenke på det omfattende sett av moralproblemer som man finner innen medisinen og som delvis er et resultat av ny medisinsk teknologi og nye diagnostiske metoder. Ytterligere har man alle de etiske problemer som foreligger i forbindelse med eksperimenter hvor dyr er forsøksobjekter og etiske problemer som generelt har med behandlingen av dyr i vårt samfunn å gjøre. Videre kan man tenke på etiske problemer som har forbindelse med miljøproblematikken, kvinnens stilling, samt en lang rekke problemer på andre områder, ikke minst innen politikken.

Som nevnt vil man altså i dette arbeidet ikke finne noen konkret drøfting eller analyse av normative spørsmål som direkte berører disse viktige og delvis svært presserende emner.

Det er imidlertid vanskelig å tenke seg en diskusjon av spørsmålene som ikke mer eller mindre stilltiende tar sitt utgangspunkt i mer generelle prinsipper av etisk art. Det er på dette punkt at teoriene som presenteres i dette arbeidet kommer inn i bildet og kunne tenkes å legge føringer på diskusjonen av problemene innenfor de felt som ble nevnt ovenfor. I tillegg til dette kan det nevnes at vi her tross alt også har presentert en skisse til et mulig verdisyn i forbindelse med de teoriene som presenteres. Dette verdisyn vil i den utstrekning det legges til grunn trolig legge ytterligere føringer på debatten om de nevnte problemer.

La oss nå gå over til en uformell skisse av hovedtankene i den konsekvensetiske teorien KET1. Disse kan uformelt formuleres slik: La oss tenke oss at h1 og h2 er to handlingsalternativer som står åpne for personen x ved tidspunktet t. La K(h1) være klassen av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer h1 og la K(h2) være klassen av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer h2. Med den forventede verdi til til alternativet h1 forstår vi nå summen av verdiene til konsekvensene i K(h1) redusert i forhold til den sannsynlighet de inntreffer med dersom h1 realiseres. Den forventede verdi til alternativet h1 defineres analogt. Grunntanken i teorien er da den at et handlingsalternativet h1 er minst like bra som handlings-alternativet h2 for individet x ved tidspunktet t hvis og bare hvis den forventede verdi til h1 er minst like stor som den forventede verdi til h2. Videre er tanken den at et handlingsalternativ er tillatt for x ved t hvis og bare hvis det har minst like stor forventet verdi som noe annet alternativ som står åpent for x ved tidspunktet t. Videre er det slik at et handlingsalternativ er påbudt for individet x ved tidspunktet t hvis og bare hvis det har større forventet verdi enn noe annet alternativ som står åpent for vedkommende ved dette tidspunktet.

Det interessante med teorien ovenfor, som selvfølgelig ikke er spesielt original, og som i særdeleshet ikke må oppfattes om en teori hvis oppfinnelse forfatteren er ansvarlig for, er at den angir en tilstrekkelig og nødvendig betingelse for når et alternativ som står åpent for en person ved et gitt tidspunkt er bedre enn et annet alternativ som står åpent for vedkommende ved dette tidspunkt. Teorien kan derfor sies å karakterisere relasjonen "minst like bra som" mellom handlingsalternativer. Et annet viktig trekk ved teorien er at den også gir en visse holdepunkter for hvordan man kan gå frem for å avgjøre om et alternativ h1 er bedre enn et annet h2. Prosedyren vil bestå i at man forsøker å danne seg et overblikk over de mulige konsekvenser som kan inntreffe om man realiserer h1 og tilsvarende en oversikt over de mulige konsekvensene som kan inntreffe om man realiserer h2. Dernest må man forsøke å vurdere sann-synlighetene til konsekvensene ved de forskjellige alternativene. Endelig må man forsøke å skaffe seg en oversikt over verdiene til de mulige konsekvensene man tar i betraktning f.eks. ved at man med utgangspunkt i en mulig konsekvens vurderer hvor mye bedre, eventuelt hvor mye verre, de andre konsekvensene ved alternativene er. På basis av den informasjonen man får på denne måten må man så forsøke å beregne den forventede verdien til de to handlingsalternativene for å se hvilket av dem som har størst slik verdi. Dette alternativet bør så foretrekkes fremfor det andre.

La oss nå forsøke å gi en oversikt over innholdet i det følgende arbeid.
Som nevnt er noe av hensikten med arbeidet å formalisere den konsekvensetiske teorien som ble skissert ovenfor. Dette innebærer at vi ønsker å formulere teorien innenfor rammen av et velavgrenset første-ordens språk. Vi avgrenser og delvis kommenterer dette språket i §1. Språket er et vanlig første-ordens språk med identitet. I språket har vi inkludert et vanlig standardsett av predikater for mengdelære. Det dreier seg om de to predikatene "x er en mengde" og "x er et element i mengden y", Ved hjelp av disse predikatene kan så alle de vanlige begrepene innenfor den klassiske matematikk defineres. Vi trenger naturligvis denne delen av språket fordi vi i stor utstrekning har behov for å snakke om mengder og funksjoner av forskjellig slag. Videre inkluderer det ikke-logiske vokabularet til teorien de primitive

predikatene som inngår i utsagnsteorien T;1 og egenskapsteorien E;3 som vi tidligere har studert.[1] Dette innebærer at man innenfor rammene av språket kan uttrykke påstander om mulige verdener, utsagn, mengder av utsagn, egenskaper og alle mulige forskjellige relasjoner som kan bestå mellom entiteter av denne typen. De viktigste ikke-logiske predikatene i språket er imidlertid de predikatene som gjør det mulig å uttrykke de påstandene vi nevnte ovenfor i vårt uformelle riss av teorien KET1. Blandt disse predikatene har vi for det første "h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w" og "k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x ved tidspunktet t utfører alternativet h i verdenen w". Videre inkluderer vi predikatene "x er et tidspunkt" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t" for å kunne uttrykke tidsforhold. Blandt andre viktige ikke-logiske predikater i dette språket er "f er en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn" samt to temmelig komplekse predikater som gjør det mulig å si noe om sannsynligheter og vekt: "z er sannsynligheten for k gitt at x utfører alternativet h i verdenen w ved tidspunktet t" og "z er vekten til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w relativt til verdifunksjonen f ". Endelig inkluderer vi de tre predikatene "h er et handlingsalternativ som det etisk sett er tillatt for x å realisere ved tidspunktet t i verdenen w", "h er et handlingsalternativ som x bør utføre i verdenen w ved tidspunktet t" og "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w". Dermed har vi i hovedtrekkene beskrevet det språket som blir lagt til grunn i denne avhandlingen.

Teorien KET1 er en vanlig første-ordens teori som er formulert i det språket vi har angitt ovenfor. For å spesifisere teorien fullstendig er det derfor nødvendig å angi de ikke-logiske aksiomene som inngår i den. Dette gjør vi i §2.1 – §2.6. Vi nevner først de aksiomene som har med tidspredikatene som ble listet opp ovenfor å gjøre. Dernest i §2.2 en rekke generelle setninger om handlingsalternativer og mulige konsekvenser som også inkluderes i grunnlaget til teorien. Dernest følger en omtale av de aksiomene vi legger til grunn for sannsynlighetspredikatet og predikatet "f er en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn". I §2.5 spesifiserer vi de gunnleggende aksiomene om forventet verdi og vekt og kommenterer dem. I tilknytning til disse aksiomene innfører vi begrepet om en endelig additiv mengdefunksjon og viser en rekke generelle satser om slike funksjoner. Disse anvendes så på vektfunksjonen vi har definert over mengden av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe ved et handlingsalternativ. Dette skjer i en rekke under-paragrafer til §2.5. I §2.6 spesifiseres det vi kaller hovedaksiomene i teorien. Disse angir nødvendige og tilstrekkelige betingelser for når et handlingsalternativ er tillatt og påbudt, og når et alternativ er bedre enn et annet. På dette punkt har vi definert teorien KET1 fullstendig.

Det viser seg ved nærmere undersøkelser, som vi først kommer til i §11.1, at denne teorien har visse motintuitive konsekvenser. I §2.7 beskriver vi derfor en modifikasjon av KET1 som vi kaller KET2 som ikke har disse motintuitive konsekvensene.

I §3 betrakter vi en utvidelse av KET1 som gjør at vi får som resultat em teori som representerer et konsekvensialistisk stnadpunkt i vid forstand. I denne teorien betraktes det forhold at en person realiserer et bestemt handlingsalternativ som en mulig konsekvens ved dette alternativet, Vi viser hvordan denne tanken kan formuleres presist innenfor rammen av KET1. En tilsvarende utvidelse kan også betraktes i forbindelse med KET2.

I §4 utleder vi en rekke satser i forbindelse med teorien KET1 som gir en et bedre bilde av hva teorien sier og delvis også hvordan den kan anvendes ved mer konkrete problemstillinger.

Man kan si om innholdet i §1 – §4 at de utgjør den første hoveddelen av denne

[1] Se Rognes [2] og Rognes [3].

avhandlingen. §4.1 – §8 utgjør den andre hoveddelen. De verditeoretiske aksiomene i KET1 utgjør i en viss forstand en meget sterk verditeori. I §4.2 viser vi hvordan denne teorien kan svekkes og også hvordan den kan reaksiomatiseres. I §5 – §8 nevner vi en del andre verditeoretiske prisipper som ikke er utledbare i noen av teoriene slik vi så langt har fremstilt dem, videre drøftes formen til en del mer spsesielle verditeoretiske prisipper. I §7 skisseres grunntrekkene i en mer konkret verditeori. Overveielsene her er av en helt uformell og tentativ karakter. I §8 fortsetter vi drøftelsene av aspekter ved verditeorien som er bygget inn i KET1.

§9 – §11 utgjør den tredje hoveddelen av dette arbeidet. I KET1 innføres begrepet forventet verdi som et primitivt begrep. I §9 betrakter vi muligheten av å definere dette begrepet bare ved hjelp av de begrepene i KET1 som har med sannsynligheter og verdier å gjøre og presenterer en slik definisjon. I §9.1 formulerer vi definisjonen i rent matematiske termer. I §10 innfører vi endel elementære satser fra teorien om relle tallfølger og rekker som vi har bruk for. I §11 beviser vi så en rekke satser i forbindelse med det begrepet forventet verdi som vi har innført. I denne paragrafen viser vi også hvordan man kan utlede aksiomene om forventet verdi og vekt som vi har innført i KET1, AFV1 – AFV12 ved å erstatte dem med et aksiom og definere de predikatee i KET1 som har med vekt og forventet verdi å gjøre.

§11.1 – §12 utgjør den fjerde hoveddelen av dette arbeidet selvom den ikke klart er skilt ut fra de øvrige deler. I §11.1 studerer vi et eksempel som synes å vise at KET1 slik den er formulert har noen klart motintutive konsekvenser. Saken har å gjøre med det følgende forhold: KET1 forhindrer ikke at et alternativ h1 som har de mest grusomme konsekvenser kan være å foretrekke fremfor et alternativ h2 som ikke har noen grusomme konsekvenser i det hele tatt såsant h1 i tillegg har tilstrekkelig mange gode konsekvenser som oppveier de grusaomme. Å foretrekke h1 fremfor h2 i en slik situasjon kan virke direkte uetisk. Endres derimot KET1 i retning av KET2 er man ikke lenger i stand til å utlede disse motintuitive konsekvensene. I §11.1 og §12 drøftes disse aspektene ved teorien temmelig utførlig.

I §13 gir vi som avslutning en oppsummering av det som har blitt gjort i dette arbeidet.

§1 Språket til teorien KET 1

Språket til teorien KET 1 er en utvidelse av språket til egenskapsteorien E;3 som er detaljert spesifisert i Rognes [3].

La oss først gjøre rede for språket til E;3: Med L;ê forstår vi språket for mengdelære. Dette er det første-ordens språket med identitet hvor det ikke-logiske vokabularet utelukkende inneholder de følgende predikater:

(0.1) "x er en mengde" – "M(x)"
(0.2) "x er et element i mengden y" – "xêy"

Innenfor rammen av L;ê kan alle de vanlige begrepene innenfor den klassiske matematikk defineres. Vi henviser i denne forbindelse til Rognes [1].

Er Δ en mengde med ikke-logiske predikater betegner "L;ê[Δ]" språket L;ê utvidet med predikatene i Δ. Vi har tidligere gjort rede for hva som menes med ZFCu-aksiomene i L;ê[Δ]. Man kan i denne forbindelse konsultere Rognes [1]. Systemet ZFCu(L;ê[Δ]) er den første-ordens teorien i L;ê[Δ] hvor alle de ikke-logiske aksiomene er nøyaktig ZFCu-aksiomene i L;ê[Δ].

Man får språket til utsagnsteorien T;1 om man utvider det ikke-logiske vokabularet til

L;ê med de følgende tre predikat-konstruksjoner:

(0.3) "x er en logisk mulig verden" – "MV(x)"
(0.4) "x er et presist deskriptivt utsagn" – "Ut(x)"
(0.5) "w er en logisk mulig verden hvor utsagnet x er sant" - "True(w,x)"

Betegner vi den mengden av predikatkonstruksjoner som inneholder nøyaktig konstruksjonene (0.3) – (0.5) med "Δ;0" har man at språket til teorien T;1 er identisk med språket L;ê[Δ;0]. Selve teorien T;1 er ZFCu(L;ê[Δ;0]) utvidet med de følgende fire ikke-logiske aksiomer U1 – U4:

U1 (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)) & Ca(x)≥ Aleph;0)
U2 (Ax)(Ay)(Ut(x) & Ut(y) –>
(x=y <–> (Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y)))))
U3 (Aw)(Ax)(True(w,x) –> (Ut(x) & MV(w)))
U4 (Ax)(M(x) & (Ay)(yêx –> MV(y)). –>.
(Ez)(Ut(z) & (Aw)(True(w,z) <–> wêx)))

Man får nå språket til egenskapsteorien E;3 ved å utvide L;ê[Δ;0] med de følgende primitive predikater:

(0.6) "x er en egenskap av grad y" – "At;y(x)"
(0.7) "x er et mulig individ som har egenskapen y i verdenen w" – "H(x,y,w)"
(0.8) "x er et mulig individ" – "MI(x)"

La oss betegne den mer omfattende mengden med predikater som inneholder konstruksjonene (0.3) – (0.8) og bare dem med "Δ;1". Man har da at Δ;0 Inkl Δ;1. Språket til egenskapsteorien E;3 er da L;ê[Δ;1]. Selve egenskapsteorien E;3 er nå ZFCu(L;ê[Δ;1]), dvs. det mengdeteoretiske systemet ZFCu med språket utvidet til L;ê[Δ;1] utvidet med ytterligere formuleringene U1 – U4, samt de følgende formler, E1 – E7 som nye ikke-logiske aksiomer:

E1 At;n(x) –> nê(N-{ø})
E2 H(x,y,w) –> (wêI & At;1(y))
E3 (Aw)(wêI & At;1(y) –> (Ez)(M(z) & z= Mg(x: H(x,y,w))))
E4 At;1(y;1) & At;1(y;2) –>
(y;1 =y;2 <–> (Aw)(wêI –> Ekst;w(y;1) = Ekst;w(y;2)))
E5 (M(x) & f: I –> Pt(x)) –> (Ey)(At;1(y) & (Aw)(wêI –> f(w) = Ekst;w(y)))
E6 nê(N-{ø}) –> (At;n(y) <–>
(At;1(y) & (Ez)(M(z) & (Aw)(Ax)(wêI & H(x,y,w) –> xêz^n))))
E7 MI(x) <–> x=x

Betegner vi formelmengden som inneholder formlene U1 – U4 og formlene E1 – E7, og bare disse, med "∑;0 " har vi at teorien E;3 kan defineres som:

E;3 = ZFCu(L;ê[Δ;1])[∑;0]

En detaljert redegjørelse for teorien E;3 er gitt i Rognes [3]. Vi forutsetter fra nå av at

leseren er fortrolig med dette arbeid.

Det er nå passende å ta for oss den konsekvensetiske teorien KET1. Språket til denne teorien er L;ê[Δ;1] utvidet med de følgende primitive ikke-logiske predikater:

(1) "h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" - "Alt;w(h,x,t)"
(2) "h er et handlingsalternativ som det etisk sett er tillatt for x å realisere ved tidspunktet t i verdenen w" - "Til;<w,t>(x,h)"
(3) "h er et handlingsalternativ som x bør utføre i verdenen w ved tidspunktet t" - "Bør;<w,t>(x,h)"
(4) "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)"
(5) "k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x ved tidspunktet t utfører handlingsalternativet h i verdenen w" - "Kon;<x,h,w,t>(k)"
(6) "z er sannsynligheten for k gitt at x utfører alternativet h i verdenen w ved tidspunktet t" - "Pr;<x,h,w,t>(z,k)"
(7) "f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn" - "VE(f)"
(8) "x er et tidspunkt" - "Tp(x)"
(9) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" - "Før(x,y)"
(10) "x er en person" - "Ps(x)"
(11) "x realiserer handlingsalternativet h fra og med tidspunktet t i verdenen w" - "Re;w(h,x,t)"
(12) "z er vekten til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w relativt til verdifunksjonen f " – "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)"
(13) "z er den forventede verdi relativt til verdifunksjonen f som handlingsalternativet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Forv;(x,t,w)(z,h,f)"

La oss kalle den mengden med predikatkonstruksjoner som bare inneholder (0.3) – (0.8) og (1) – (13) for Δ;2. Språket til KET1 er da språket for mengdelære, ie. L:ê, utvidet med konstruksjonene i Δ;2. Kort sagt er språket til KET1 identisk med språket L;ê[Δ;2]. Dermed er dette rigorøst spesifisert. Som man ser dreier det seg om et temmelig omfattende språk.

Innenfor rammen av L;ê[Δ;2] er det mulig å formulere en lang rekke påstander som neppe kan uttrykkes innenfor de mer uttrykksfattige språkene L;ê[Δ;0] og L;ê[Δ;1]. Vi skal etterhvert spesifisere en lang rekke formler av denne typen i L;êΔ;2] som vil utgjøre en viktig del av de ikke-logiske aksiomene i KET1. Mer spesifikt dreier det seg om for det første visse formler AKE1 – AKE14 som er formler som generelt uttrykker påstander som dreier seg om tid, handlings-alternativer og mulige konsekvenser. Videre tar vi med visse setninger som fikserer betydningen til sannsynlighetspredikatet, predikatet (6) på listen ovenfor. Disse setningene kalles for ASN1 – ASN7. Ytterligere spesifiserer vi visse aksiomer for predikatet "f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn" som betegnes med VER1 – VER4. Endelig er det to andre grupper av setninger i L;ê[Δ;2] vi skal betrakte: For det første en rekke setninger om forventet verdi og vekt til handlingsalternativer og klasser av handlingsalternativer. Det dreier seg om setningene AFV1 – AFV 12. For det andre har vi det vi har valgt å kalle "hovedaksiomene" i teorien ATB1 – ATB3 som karakteriserer betydningen til predikatene (2) – (4) på listen ovenfor.

Utvides nå teorien ZFCu(L;ê[Δ;2])[∑;0], ie E;3 med språket utvidet til L;ê[Δ;2], med

de setningene som vi har nevnt ovenfor får man som resultat teorien KET1. Betegner vi mengden av formler i L;ê[Δ;2] som inneholder nøyaktig formlene AKE1 – AKE14, ASN1 – ASN7, VER1 – VER4, AFV1 – AFV12 og ATB1 – ATB3 med ∑;1 kan KET1 defineres slik:

KET1 = ZFCu(L;ê[Δ,2])[∑;0U ∑;1]

Med andre ord er KET1 første-ordensteorien ZFCu(L;ê[Δ;2]) utvidet med setningene i ∑;0 U ∑;1 som nye ikke-logiske aksiomer.

Før vi går videre er det hensiktsmessig å fiksere en del av den notasjonen om vil bli brukt i det følgende. Vi lar "T" betegne mengden av alle tidspukter, dvs. mengden Mg(x: Tp(x)). Videre brukes "P;w(h,x,t)(k)" som betegnelse på det tallet z som representerer sannsynligheten for den mulige konsekvensen k gitt at x realiserer handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w. Dette innebærer at "P;w(h,x,t)(k)" betegner (iz)Pr;<x,h,w,t>(z,k). Endelig skal vi bruke "K;w(h,x,t)" for å betegne mengden av alle de utsagn som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t utfører alternativet h i verdenen w. Man kan sammenfatte disse notasjonelle konvensjonene ved hjelp av den følgende definisjon:

Definisjon 1.1

(a) T= Mg(x: Tp(x))

(b) P;w(h,x,t)(k) = (iz)Pr;<x,h,w,t>(z,k)

(c) K;w(h,x,t) = Mg(k: Kon;<x,h,w,t>(k))

§2 Aksiomer i teorien KET 1

Etterhvert vil vi nå spesifisere de ulike ikke-logiske aksiomene som inngår i teorien KET. En del av disse aksiomene er temmelig kompliserte, mens andre er av en relativt opplagt og triviell karakter (forutsatt at man aksepterer at predikatene på listen i §1 er meningsfulle). Vi skal presentere aksiomene i grupper og ledsage aksiomene i hver gruppe med forholdsvis utførlige forklaringer. De ikke-logiske aksiomene kan inndeles på følgende vis: (a) En del elementære aksiomer som har med tidspredikatene å gjøre. (b) En del elementære aksiomer som det er naturlig å nevne i forbindelse med handlingsalternativer og mulige konsekvenser. (c) En del meget grunnleggende ikke-logiske aksiomer om sannsynlighet. (d) En del viktige, men trolig kontroversielle aksiomer om etiske verdifunksjoner. (e) Aksiomene om forventet verdi og vekt. (f) Hovedaksiomene i selve teorien.

§2.1 Aksiomer om tid.

Vi har inkludert predkatene " x er et tidspunkt" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" i vokubularet til språket til teorien KET1. Dette er selvfølgelig fordi man har behov for å kunne si noe om tidsforhold i forbindelse med diskusjon av etiske spørsmål. Hvilke handlingsalterativer som står åpne for en person ved et tidspunkt synes avhenge av tidspunktet. Det virker temmelig opplagt at de handlngsalternativer som står åpne for en person ved et bestemt tidspunkt ikke nødvendigvis behøver å være åpne ved et senere eller tidligere tidspunkt. Videre kan det være logisk sett mulig at ingen av de handligsalternativer en person har ved noe tidspunkt er identisk med de handlingsalternativene som noen annen person har ved noe tidspunkt. Man kan evne en lang rekke andre setninger av lignende

karakter. Det synes vanskelig å uttrykke slike påstander om man ikke inkluderer noen uttrykks-midler i språket som har med tid å gjøre. Dette er grunnen til at vi har tatt med de to "tidspredikatene" i det ikke-logiske vokabularet i språket L.

AKE 1 Før(x,y) –> Tp(x) & Tp(y)
AKE 2 Før(x,y) & Før(y,z) –> Før(x,z)
AKE 3 Før(x,y) –> ¬Før(y,x)
AKE 4 Tp(x) & Tp(y) –> (x=y v Før(x,y) v Før(y,x))
AKE 5 Før(x,y) –> (Ez)(Før(x,z) & Før(z,y))

Som man ser er de setningene vi har oppført her i det vesentlige av en temmelig triviell natur. AKE1 uttrykker at dersom x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y er x og y tidspunkter. AKE2 – AKE4 uttrykker at Før-relasjonen er transitiv assymmetrisk og total relativt til klassen av tidspunkter. Endelig uttrykker AKE5 at Før-relasjonen er tett. Mellom to tidspunkter x og y der x kommer før y kan man alltid skyte inn et tidspunkt z som kommer etter x, men før y. Strengt tatt spiller betraktninger i forbindelse med tid en underordnet rolle i dette arbeidet. Vi har derfor bare tatt med antagelsene AKE1 – AKE5 for å være helt eksplisitte når det gjelder dette temaet.

§2.2 Generelle aksiomer om handlingsalternativer og mulige konsekvenser.

De følgende åpne setninger inngår også blandt de ikke-logiske aksiomene i KET1. Vi kommenterer dem litt mer utførlig nedenfor.

AKE 6 Mng(Mg(x: Tp(x))) & Mng(Mg(x: Ps(x)))
AKE 7 Alt;w(h,x,t) –> Tp(t) &wêI
AKE 8 Til;<w,t>(x,h) –> Alt;w(h,x,t)
AKE 9 Bør;<w,t>(x,h) –> Alt;w(h,x,t)
AKE 10 Re;w(h,x,t) –> Alt;w(h,x,t)
AKE 11 Kon;<x,h,w,t>(k) –> Alt;w(h,x,t)
AKE 12 Kon;<x,h,w,t>(k) –> (Tp(t) &wêI & kêU)
AKE 13 Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) –> Alt;w(h;1,x,t) &Alt;w(h;2,x,t)

Som man ser uttrykker AKE6 at mengden av alle tidspunkter faktisk er en mengde. Dette følger ikke direkte fra AKE1 – AKE5-aksiomene om tid. Disse er i seg selv forenlige med at mengden av tidspunkter ikke eksisterer i det kumu-lative hierarki. AKE6 sier imidlertid at mengden faktisk eksisterer. Dette innebærer i lys av AKE1 at også mengden av alle de par <x,y> der man har Før(x,y) eksisterer. Grunnen er at det følger fra de rent mengdeteoretiske aksiomene som inngår i teorien at kryssproduktet av to mengder x, y eksisterer om x og y eksisterer. Nå er det slik om AKE6 er riktig at T= Mg(x: Tp(x)) eksisterer. Men siden Mg(<x,y>: Før(x,y)> Inkl TXT følger det ved hjelp av utsondringsaksiomet at Mg(<x,y>: Før(x,y)> eksisterer. Den andre halvdelen av AKE6 sier at mengden av personer eksisterer faktisk er en mengde og derfor dukker opp på et eller annet nivå i det kumulative mengdehierarki. Såvidt vi kan se er dette en rimelig antagelse. Det er vanskelig å se noen spesielt sterke grunner for at denne megden av mulige entiteter skulle være uten noe kardinaltall.

La oss se på de andre aksiomene. AKE7 uttrykker at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så er t et tidspunkt og w en logisk mulig verden. Dette synes vanskelig å benekte om "Alt;w(h,x,t)" gis den

lesemåten som er forklart i §1. Det samme gjelder AKE8 og AKE9 som samlet uttrykker at dersom h er et handlingsalternativ som det er tillatt for x å utføre ved tidspunktet t i verdenen w eller dersom h er et handlingsalternativ som x bør utføre ved t i verdenen w så er er h et handlings-alternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. Igjen virker det ytterst vanskelig å benekte disse to påstandene om man har lesemåten som vi tidligere innførte i tankene. Dette gjelder også AKE10 og AKE11. Den første av disse setningene uttrykker at dersom h er et handlingsalternativ som x realiserer fra og med tidspunktet t i verdenen w så er h et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. Den andre setningen hevder det samme om k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x realiserer handlingalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w. I stedet for å bruke den temmelig kompliserte uttrykksmåten " k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x realiserer handlings-alternativet h ved tidspunktet t i verdenen w" skal vi i stedet bruke det litt kortere uttrykket "k er en mulig konsekvens ved alternativet h relativt til <x,t,w>" eller det enda kortere uttrykket "k er en mulig konsekvens ved h relativt til <x,t,w>". Er det i en bestemt sammenheng klart hvilket triple <x,t,w> det er vi forutsetter skal vi tillate oss å bruke "k er en mulig konsekvens ved h".

Når det gjelder AKE12 ser man at dette sier at dersom k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h i verdenen w så er t et tidspunkt, w en mulig verden og kêU, dvs. k er et utsagn. Det siste aksiomet på listen, AKE13, uttrykker dersom h;1 er et alternativ som det er minst like bra at x realiserer ved tidspunktet t i verdenen w som alternativet h;2 så er h,1 og h;2 handlings-alternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Det synes vaskelig å se at det skulle være mulig å reise noen alvorlige innvendinger mot disse to setningene. Begge synes å være temmelig trivielle.

Det er ytterligere noen setninger som dreier seg inneholder de predikatene som inngår i AKE1 – AKE13 som det kan være av interesse å nevne. Ser man på de aksiomene som er nevnt så langt (og forøvrig i sammenheng med dem som inngår i teorien E;3) er det tilsynelatende umulig å vise at f.eks. mengden av alle de h der Alt;w(h,x,t) eksisterer. Men det synes nærliggende å tro at denne mengden burde eksistere. Man kan derfor også ta i betraktning den følgende setning:

AKE14 Tp(t) & wêI –> Mng(Mg(h: Alt;w(h,x,t)))

Fra dette aksiomet og AKE8 – AKE10 kan man utlede at også mengdene Mg(h: Til;<w,t>(x,h)), Mg(h: Bør;<w,t>(x,h)) og Mg(h: Re;w(h,x,t)) eksisterer om t er et tidspunkt og w er en logisk mulig verden. Det bør imidlertid nevne at man ikke uten videre kan vise at selve alternativrelasjonen Alt, dvs.

Mg(<w,h,x,t>: Alt;w(h,x,t))

eksisterer.

§2.3 Grunnleggende aksiomer om sannsynlighet.

Vi kommer nå til de setningene som har med sannsynlighet å gjøre og som inngår som ikke-logiske aksiomer i KET1. Det dreier seg om de følgende setninger:

ASN 1 Kon;<x,h,w,t>(k) –> (Ez)(Pr;<x,h,w,t>(z,k))
ASN 2 Pr;<x,h,w,t>(z,k) –> (zê[0,1] & kêU)
ASN 3 k;1,k;2êU &s(k;1Ωk;2)=ø & Pr;<x,h,w,t>(z;1,k;1) &

Pr;<x,h,w,t>(z;2,k;2) –> Pr;<x,h,w,t>(z;1+z;2,D(k;1,k;2))

ASN 4 Pr;<x,h,w,t>(z,k) –> (E!z)(Pr;<x,h,w,t>(z,k))

ASN 5 Pr;<x,h,w,t>(z,k) –> (Ey)(Pr;<x,h,w,t>(y,Neg(k)))

ASN 6 Pr;<x,h,w,t>(z;1,k;1) & Pr;<x,h,w,t>(z;2,k;2) –>
(Ez)(Pr;<x,h,w,t>(z,Sn(k;1,k;2)))

ASN 7 Pr;<x,h,w,t>(z,k) –> Pr;<x,h,w,t>(1,s;-1(I))

Disse aksiomene må kommenteres mer utførlig. Egentlig er de langt fra så vanskelige å forstå som man kan få inntrykk av når man bare får seg presentert dem en block som det gjøres her.

Den første setningen, ASN 1 sier at dersom k er et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe dersom individet x realiserer handlingsalternativet h fra og med tidspunktet t i verdenen w så er to ting tilfelle: (i) k er et utsagn og (ii) det finnes noe z som er sansynligheten for k beskriver noe som er riktig gitt at x realiserer h ved tidspunktet t i verdenen w. Det kan neppe på dette punkt være fruktbart å diskutere argumenter for og i mot denne påstanden isolert. Den må sees i sammenheng med de andre setningene ASN 2 – ASN 7. Men allerede så langt synes det rimelig å si at ASN 1 ikke representerer en påstand som det umiddelbart er noen grunn til å avvise.

ASN 2 er en temmelig svak påstand. Den uttrykker at dersom z er sannsynligheten for at k er tilfelle gitt at x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h i verdenen w så er z et reelt tall i det lukkede intervallet fra og med 0 til og med 1, dvs. [0,1] og dessuten er k et utsagn. Denne setningen reflekterer bare det som er vanlig, nemlig at man bruker reelle tall i intervallet [0,1] når man angir sannsynligheter.

ASN 3 sier, om man tillater seg å være noe unøyaktig, at dersom k;1 og k;2 er to logisk sett uforenelige utsagn som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe dersom alternativet h realiseres så er sannsynligheten for at den hendelsen som beskrives av disjunksjonen av dem, D(k;1,k;2), lik summen av sannsynligheten for at k;1 inntreffer om h realiseres og sannsynligheten for at k;2 inntreffer om h realiseres. Dette innebærer ikke annet enn at den sannsynlighetsfunkjonen som vi arbeider med her er endelig-additiv.

Når det gjelder ASN4 uttrykker denne setningen at derom z er sannsynligheten for at k vil inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h så er z entydig bestemt. Med andre ord finnes det ett og bare ett reellt tall i intervallet [0,1] som angir sannsynligheten for en mulig konsekvens ved et bestemt alternativ om denne mulige konsekvensen opptrer med en viss sannsynlighet ved dette alternativet.

Studerer man ASN5 er det ikke vanskelig å se at denne setningen uttrykker at dersom det finnes et reellt tall z som er sannsynligheten for at k skal inntreffe gitt at x ved t i verdenen w realiserer alternativet så finnes det også et reellt tallsom representerer sannsynligheten for at negasjonen av k, Neg(k), inntreffer gitt at x ved t i verdenen w realiserer alternativet h.

Holder man w,h,x og t fiksert og betrakter Mg(k: (Ez)Pr;<x,h,w,t)(z,k)) ser man altså at ASN5 impliserer at denne mengden er lukket under negasjons-operatoren Neg.

ASN6 impliserer at mengden Mg(k: (Ez)Pr;<x,h,w,t)(z,k)) også er lukket under den endelige konjunsjonsoperatoren K. Endelig uttrykker ASN7 at dersom Mg(k: (Ez)Pr;<x,h,w,t)(z,k)) er ikke-tom så er det "tautologiske utsagn", dvs. det utsaagnet som er sant i alle logisk mulige verdener, μ;-1(I) med i denne mengden. Enn mer uttrykker ASN7 at sannsynligheten til μ;-1(I) gitt at x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h er lik 1.

La oss sammenfatte disse betraktningene i forbindelse med de sannsynlighetsteoretiske aksiomene ASN1 – ASN7. Vi innførte i §1 "P;w(h,x,t)(k)" som

forkortelse for "(iz)Pr;<x,h,w,t)(z,k)". La oss sette per definisjon P;w(h,x,t) = Mg(<k,z>: Pr;<x,h,w,t)(z,k)). La oss videre per definisjon sette: Dm;w(h,x,t) = Mg(k: (Ez)Pr;<x,h,w,t)(z,k)). Fra aksiomene ovenfor fremgår det da at P;w(h,x,t) er en funksjon og at domenet til denne funksjonen er Dm;w(h,x,t). At P;w(h,x,t) er en funksjon følger fra ASN4. Videre følger det fra ASN5 og ASN6 at DM;w(h,x,t) er lukket under negasjon og endelig konjunksjon. Videre, ved hjelp av ASN7, at denne mengden inneholder μ;-1(I) dersom den er ikke-tom. Det fremgår ytterligere fra ASN2 at dersom domenet til P;w(h,x,t) er ikke-tomt så har man at P;w(h,x,t) ligger i intervallet [0,1], det vil si at 0≤P;w(h,x,t)≤1. Endelig ser man i lys av ASN1 at K;w(h,x,t), mengden av alle de utsagn som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h, er inkludert i Dm;w(h,x,t), dvs. domenet til P;w(h,x,t). Man har altså:

(1) K;w(h,x,t) Inkl Dom(P;w(h,x,t)) = Dm;w(h,x,t).

Aksiomene kan derfor sies å implisere at <P;w(h,x,t), Dom(P;w(h,x,t))> er et endelig additivt sannsynlighetsrom der (1) holder.

§2.4 Aksiomer om etiske verdifunksjoner.

Når det gjelder predikatet "VE(f)" er lukningen av de følgende fire formler ikke-logiske aksiomer i KET 1.

(VER1) VE(f) –> (Func(f) & Dom(f)=U & Rgn(f) Inkl Reell)

(VER2) VE(f;1) &VE(f;2) –> (Ec)(cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f;1(x)= c*f;2(x))

(VER3) (Ef)VE(f)

(VER4) VE(f) & cêReell &c>0 & g= Mg(<x,c*f(x)>:xêU). –> VE(g)

La oss fremsette enkelte kommentarer til disse aksiomene. Det første som kan ha interesse er å reformulere hva disse aksiomene sier i vanlig språk. Den første setningen uttrykker at dersom f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn så er for det første f en funksjon, for det andre er domenet til den funksjonen mengden av alle presise deskriptive utsagn U og for det tredje er verdiområdet til f inkludert i mengden av de reelle tall. Dette aksiomet virker rimelig ut fra lesemåten av predikatet "VE(f)" som er "f er en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn".

Den andre formelen, VER2, uttykker at dersom f,1 og f;2 er to etiske verdifunksjoner over mengden av utsagn så finnes det alltid et reellt positivt tall c slik at det relle tall funksjonen f;1 tilordner et vilkårlig utsagn x er produktet av c og det relle tall funksjonen f;2 tilordner x for alle utsagn x.

Formelen VER3 sier at det finnes en etisk verdifuksjon over mengden av presise deskriptive utsagn.

Når det gjelder VER4 uttrykker denne setningen at dersom f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn og c et positivt reellt tall så vil også den funksjonen g som til ethvert utsagn tilordner tallet k*f(x) være en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn.

Når det gjelder predikatet "VE(f)" er det hensikten at dette predikatet skal tolkes slik at f gir et mål på den indre verdien i seg selv som de diverse utsagnene i U beskriver. Er derfor f en etisk verdifunksjon over U, og har man at f(x)>f(y) for visse utsagn x,y, er det meningen at dette siste skal innebære at den indre verdi i seg selv som det forholdet som beskrives av utsagnet x har er større enn den indre verdi i seg selv som det forholdet som beskrives av utsagnet y. En etisk verdifunksjon er det altså meningen at skal angi størrelsen til den indre

verdi i seg selv som et saksforhold har.

I denne forbindelse bør man merke seg følgende: Strengt tatt har vi ikke innført de følgende uttrykk som primitive ikke-logiske predikater:

" x er et utsagn som beskriver et forhold som har positiv indre verdi i seg selv" – "Pv(x)"
"x er et utsagn som beskriver et forhold som har negativ indre verdi i seg selv" – "Nv(x)"
"x er et utsagn som beskriver et forhold som er nøytralt når det gjelder indre verdi i seg selv" – "Neu(x)"
" x er et utsagn som beskriver et forhold som har større indre verdi i seg selv en det forhold som beskrives av utsagnet y" – "Sv(x,y)"
"x er et utsagn som beskriver et forhold som har like stor indre verdi i seg selv som det forhold som beskrives av utsagnet y" – "Lv(x,y)"

Derimot kunne vi ha innført disse som primitive. Imidlertid har valgt å innføre dem ved definisjonen ovenfor. Det ville imidlertid ikke ha vært noe i veien for å ha innført dem som primitive predikater og så lagt til formlene (a) – (e) som nye ikke-logiske aksiomer. Fra en rent formell synsvinkel går dette prinsipielt ut på det samme. Den siste fremgangsmåten ville også ha hatt den fordel at den tydeligere vil ha gjort det klart for leseren hva det er KET1 sier om verdier.

Definisjon 2.4.1:
(a) $Pv(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ (Ef)(VE(f) \ \& f(x)>0))$
(b) $Nv(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ (Ef)(VE(f) \ \& f(x)<0))$
(c) $Neu(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ (Ef)(VE(f) \ \& f(x)=0))$
(d) $Sv(x,y) \leftrightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ (Ef)(VE(f) \ \& f(x)>f(y))$
(e) $Lv(x,y) \leftrightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ (Ef)(VE(f) \ \& f(x)=f(y))$

På basis av aksiomene VER1 – VER4 samt de definisjonene som er gitt er det mulig å bevise:

Teorem 2.4.2 (i) $Pv(x) \leftrightarrow x \hat{e} U \ \& (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)>0)$
(ii) $Nv(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)<0))$
(iii) $Neu(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)=0))$
(iv) $Sv(x,y) \leftrightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)>f(y))$
(v) $Lv(x,y) \leftrightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)=f(y))$

Beviset for dette er i det vesentlige temmelig trivielt. Vi gir det likevel for tydelighetens skyld.

Bevis: Ad (i): Fra definisjonen av "Pv(x)" og det at Pv(x) følger det at $x \hat{e} U$ og at det finnes g der :

(1) $VE(g) \ \& \ g(x)>0$.

Anta (2) VE(f) for vilkårlig f. Fra dette, (1) og VER2 følger at det finnes c slik at

(3) $c \hat{e} Reell \ \& \ c>0 \ \& \ (Ax)(x \hat{e} U \rightarrow f(x)= c*g(x))$

Siden $x \hat{e} U$ har vi derfor at (4) $f(x)=c*g(x)$. Fra dette, (1) og det at $c>0 \& c \hat{e} Reell$ følger umiddelbart at $f(x)>0$. Men f var en vilkårligverdifunksjon der VE(f). Vi har derfor: (Af) $(VE(f) \rightarrow f(x)>0)$. Anta på den annen side at

(5) $x \hat{e} U \ \& (Af)(VE(f) \rightarrow f(x)>0)$

Fra VER3 følger at det finnes g der (6) VE(g). Dette og (5) impliserer g(x)>0. Fra dette og (5) følger derfor xêU & VE(g) & g(x)>0. Men herav:

xêU & (Eg)(VE(g) & g(x)>0).

Dette og definisjonen av "Pv(x)" impliserer Pv(x). Dette viser at påstanden (i) holder. Når det gjelder punktene (ii) og (iii) i dette teoremet er beviset for dem omtrent som beviset for punkt (i), men selvfølgelig med visse forandringer. Vi overlater derfor beviset for disse punktene til leseren.

Ad (iv): Fra definisjonen av "Sv(x,y)" og det at Sv(x,y) følger det at x,yêU og at det finnes g der :

(7) VE(g) & g(x)>g(y).

Anta (8) VE(f) for vilkårlig f. Fra dette, (7) og VER2 følger at det finnes c slik at

(9) cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x)= c*g(x))

Siden x,yêU har vi derfor at (10) f(x)=c*g(x) & f(y) =c*g(y). Fra dette, (7) og det at c>0&cêReell følger umiddelbart at f(x)>f(y). Men f var en vilkårligverdifunksjon der VE(f). Vi har derfor: (Af)(VE(f) –> f(x)>g(y)). Anta på den annen side at

(11) xêU &(Af)(VE(f) –> f(x)>f(y))

Fra VER3 følger at det finnes g der (12) VE(g). Dette og (11) impliserer g(x)>g(y). Fra dette og (12) følger derfor xêU & VE(g) & g(x)>g(y). Men herav:

xêU & (Eg)(VE(g) & g(x)>g(y).

Dette og definisjonen av "Sv(x,y)" impliserer Sv(x,y). Dette viser at påstanden (iv) holder. Når det gjelder punkt (v) er beviset helt analogt. **Q.E.D.**

Vi skal gå nærmere inn på verditeoretiske spørsmål i §5 – §8. I den forbindelse skal vi drøfte verditeorier i språk som er meget nær beslektet med språket til KET1, men som er langt svakere enn den meget sterke og kvantitative teorien som er representert ved VER1 – VER4.

§2.5 Aksiomer om forventet verdi og vekt.

Vi skal betrakte noen rent matematiske begrepsdannelser som er av relevans i forbindelse med teorien ovenfor. Med en konsekvensstruktur forstår vi et triple <X,p,v> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav: (i) X er en ikke-tom mengde. (ii) p er en funksjon som til hvert element i X tilordner et reelt tall i intervallet [0,1]. Dette innebærer at p: X –> [0,1]. (iii) v er en funksjon som tilordner ethvert element i X et reelt tall, mao. v: X –> Reell. Dette avslutter definisjonen av hva som menes med en konsekvensstruktur.

Er <X,p,v> en konsekvensstruktur kalles X for mengden av konsekvenser i strukturen, p kaller vi for sannsynlighetsfunksjonen i strukturen og endelig kalles v for verdifunksjonen i strukturen.

I en konsekvensstruktur <X,p,v> er det meningen at X representerer klassen av alle de mulige konsekvenser som kan intreffe hvis en aktør x realiserer et handlingsalternativ h fra og med tidspunktet t. Er kêX er det videre meningen at p(k) representerer sannsynligheten for at den mulige konsekvensen k inntreffer om x realiserer h fra og med tidspunktet t. Endelig er det hensikten at v(k), såsant kêX skal representere verdien til konsekvensen x.

Anta <X,p,v> er en konsekvensstruktur. Da kalles klassen av alle de funksjoner f der f: X –> Reell og hvor vi har at det finnes et reelt tall c>0 slik at (Ax)(xêX –> f(x)= c*v(x)) for familien av verdifunksjoner over strukturen <X,p,v>. Er <X,p,v> en konsekvensstruktur betegner vi familien av verdifunksjoner over den med Q(v)

Det siste begrepet vi skal introdusere er begrepet forventningsfunksjon over en konsekvensstruktur <X,p,v>:

Med en forventningsfunksjon over en konsekvensstruktur <X,p,v> forstås en funksjon som oppfyller følgende krav:

(i) F : Prod(Pt(X), Q(v)) –> Reell
(ii) Er a,bêPt(X) & aΩb=ø & fêQ(v) har man at:
F(aUb,f) = F(a,f) + F(b,f)
(iii) Er xêX& fêQ(v) gjelder F({x},f) = v(x)*p(x)
(iv) Er fêQ(v) gjelder F(ø,f)=0
(v) Er f,gêQ(v) & cêReell & c>0 og har man (Ax)(xêX –> f(x)= c*g(x))
gjelder: F(a,f) = c*F(a,g) for alle aêPt(X).

Dette avslutter definisjonen.

Vi skal nå eksplisitt formulere de aksiomene som har med forventet verdi og vekt å gjøre. Man må nå tenke seg at språket til egenskapsteorien E;3 ikke bare er utvidet med predikatene (1) – (10) som ble gitt i §1, men også de følgende konstruksjoner:

(11) "z er vekten til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w relativt til verdifunksjonen f "
– "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)"
(12) "z er den forventede verdi relativt til verdifunksjonen f som handlingsalternativet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w"
– "Forv;(x,t,w)(z,h,f)"

I forbindelse med disse predikatene innfører vi de følgende to definisjoner:

Definisjon 2.1.1 VT;(h,x,t,w)(y,f) = (iz)(Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f))
FV;<w,t>(x,h,f) = (iz)(Forv;(x,t,w)(z,h,f))
P;w(h,x,t)(k) = (iz)(Pr;<x,h,w,t>(z,k))

Når det gjelder disse konstruksjonene skal vi se på de følgende setninger som inneholder dem. Disse setningene vil bli betegnet med AFV 1 – AFV 12.

AFV 1 Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f) –> zêReell & VE(f)
AFV2 M(y) & y Inkl Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)) & Alt;w(h,x,t)
& VE(f). –> (E!z)(Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f))
AFV3 Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f) –>
.Alt;w(h,x,t) & M(y) & y Inkl Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u))
AFV4 Forv;(x,t,w)(z,h,f) –> .zêReell & Alt;w(h,x,t) & VE(f)
AFV5 (Ez)(Forv;(x,t,w)(z,h,f)) –> (E!z)(zêReell & Forv;(x,t,w)(z,h,f))
AFV6 Alt;w(h,x,t) & VE(f) & y = Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)) –>
FV; <w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(y,f)

AFV7 r,y,z Inkl Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)) &
r= yUz & yΩz=ø & VE(f) & Alt;w(h,x,t) –>
VT;(h,x,t,w)(r,f) = VT;(h,x,t,w)(y,f) + VT;(h,x,t,w)(z,f)
AFV8 VE(f) & Alt;w(h,x,t) –> VT;(h,x,t,w)(ø,f) =0
AFV9 Alt;w(h,x,t) & y Inkl Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)) & VE(f) & VF(g)

& k>0 & (Ax)(xêU –> f(x)= k*g(x)) –>
VT;(h,x,t,w)(y,f) = k* VT;(h,x,t,w)(y,g)

AFV10 VE(f) & Alt;w(h,x,t) & Kon;<x,h,w,t>(u) –>
VT;(h,x,t,w)({u},f) = P;w(h,x,t)(u) * f(u)

AFV11 Alt;w(h,x,t) & ø≠X Inkl K;w(h,x,t) & VE(f) &
(Ay)(yêX –> P;w(h,x,t)(y)>0). –>
(i) (Ay)(yêX–>f(y)>0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)>0
(ii) (Ay)(yêX–>f(y)<0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)<0
(iii) (Ay)(yêX–>f(y) = 0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f) = 0

AFV12 Alt;w(h,x,t) & ø≠X Inkl K;w(h,x,t) & VE(f) &
(Ay)(yêX –> P;w(h,x,t)(y)=0). –> VT;(h,x,t,w)(X,f)=0

Vi tar med AFV11 og AFV12 fordi de virker rimelige og fordi det er vanskelig å se hvordan man kan utlede dem fra de øvrige aksiomene. De formlene som er skrevet opp her kan virke temmelig ufordøyelige slik de står. La oss derfor kommentere dem mer utførlig.

Når det gjelder AFV1 uttrykker denne formelen at dersom z er vekten relativt til en verdifunksjon f til en klasse y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h, så må z være et reelt tall og f en etisk verdifunksjon. Det skulle være temmelig klart at denne formelen uttrykker akkurat dette om man ser tilbake på lesemåten som ble innført i forbindelse med uttrykket "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)" i §1. At vekten bør representeres ved et reelt tall, og at f er en etisk verdifunksjon i den betydning vi har forklart, virker rimelig om man antar at Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f). Det er følgelig vanskelig å se at det skulle være mulig å rette noen avgjørende innvendinger mot denne formelen.

Antesedenten i den neste formelen på listen ovenfor, AFV2, uttrykker at y er en mengde av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t utfører alternativet h i verdenen w, videre at h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w og at f er er en etisk verdifunksjon. Gitt at disse betingelsene er oppfylt sier setningen at det finnes nøyaktig ett og bare et reelt tall som representerer vekten relativt til verdifunksjonen f til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h. At dette holder helt generelt virker ikke helt urimelig. Det kan imidlertid ikke sies å være direkte innlysende. Vi har heller ikke greid å utlede dette fra noen andre påstander som virker mer inn-lysende. Det bør imidlertid bemerkes at denne setningen er temmelig grunnleggende i teorien.

Når det gjelder AFV3 sier denne setningen at dersom z er vekten relativt til verdifunksjonen f til mengden y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer alternativet h så er tre ting tilfelle: For det første er h et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. For det andre er y en mengde og for det tredje er y en delmengde av alle de utsagnene som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved t i verdenen w realiserer alternativet h. Denne setningen virker triviell i lys av den lesemåten som vi har innført for predikatet "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)" i §1.

Formlene AFV4 – AFV6 angår forventet verdi og karakteriserer relasjonen "z er den forventede verdi relativt til verdifunksjonen f som handlingsalterna-tivet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w", mao. "Forv;(x,t,w)(z,h,f)". Den første av disse formlene, AFV4, har den samme karakter av å være en selvfølgelighet som AFV3 og uttrykker at dersom z er den forventede verdien relativt til verdifunksjonen f som handlingsalternativet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w så er følgende tilfelle: For det første er h et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. For det andre er z et reelt tall og for det

tredje er f en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn. Intuitivt bedømt virker dette svært rimelig. Det neste aksiomet, AFV5, uttrykker at dersom det finnes et reelt tall som er den forventede verdien relativt til verdifunksjonen f til handlingsalternativet h som står åpent for x ved t i verdenen w så finnes det ett og bare ett slikt tall. Også dette virker rimelig. Det siste aksiomet, AFV6, innebærer at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w, og f er en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn, så er den forventede verdi til handlingsalternativet h identisk med vekten relativt til f til mengden av alle de mulige konsekvensene som kan inntreffe om x realiserer h.

AFV7 er et viktig prinsipp som viser at vektfunksjonen VT;(h,x,t,w)(y,f) betraktet som en funksjon av y er en endelig additiv funksjon. Setningen sier at dersom y og z er to delmengder av mengden av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved t i verdenen w realiserer handlingsalternativet h så er vekten til unionen y og z lik summen av vekten til y og vekten til z så sant de to mengdene ikke har felles elementer. "Vekten til y" betyr her selvfølgelig "vekten relativt til verdifunksjonen f til mengden y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer h fra og med t i verdenen w". En tilsvarende bemerkning kan gjøres når det gjelder uttrykket "vekten til z".

Nullmengden er selvfølgelig en delmengde av mengden av de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved t realiserer alternativet h i verdenen w. Er f en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn og h et handlings-alternativ som står åpent for x ved t i verdenen w er vekten til nullmengden lik 0. Dette er hva AFV8 innebærer.

La oss nå i det følgende, for å unngå altfor lange formuleringer, bli enige om å velge ut et individ x, et tidspunkt t og en mulig verden w. Sier vi derfor i det følgende noe om et handlingsalternativ h, klassen av mulige konsekvenser ved h, sannsynligheten for en konsekvens k om alternativet h utføres, osv., så er det hele tiden underforstått at det er relativt til x, t og w. Holder vi oss til denne konvensjonen kan innholdet i AFV9 reformuleres på den følgende måte: Anta f og g er to etiske verdifunksjoner over mengden av utsagn der man har at det finnes et positivt reelt tall k slik at f(x)=k*g(x) for ethvert utsagn x. Anta h er et handlingsalternativ og at y er en klasse med mulige konsekvenser som kan inntreffe ved dette alternativet. Da har man at vekten til y relativt til verdifunksjonen f er k ganger større enn vekten til y relativt til verdifunksjonen g. Dette synes å være et krav som det er svært rimelig å stille til vektfunksjonen over mengden av mulige konsekvenser til et alternativ. Endrer man verdifunksjonen, men slik at de innbyrdes relative verdiforhold mellom utsagnene beholdes, må man kunne kreve det samme av vektfunksjonen som angir vekten til ulike mengder av mulige konsekvenser.

AFV10 er også en viktig setning i teorien vi her betrakter. Setningen innebærer at dersom u er en mulig konsekvens som kan inntreffe ved alternativet h så er vekten til den enhetsmengden som bare inneholder u relativt til den etiske verdifunksjonen f produktet av sannsynligheten til u ved alternativet h og verdien som f tilordner u. Er derfor f.eks K ={u;1,...,u;n} en delmengde av alle de mulige konsekvensene som kan inntreffe om alternativet h realiseres og sannsynligheten til u;i ved alternativet h er p;i for i=1,...,n og f en etisk verdifunksjon, vil følgelig vekten til K i lys av AFV10 og AFV7 være f(u;1)*p;1+ .... + f(u;n)*p;n, mao. ∑/i,1,n/(f(u;i)*p;i).

La oss så se på de to siste setningene på listen ovenfor. AFV11 uttrykker at dersom X er en ikke-tom mengde med mulige konsekvenser som kan inntreffe ved et handlingsalternativ og f er en etisk verdifunksjon og sannsynligheten for alle de mulige konsekvensene i X dersom h realiseres er større enn 0 så vil vekten til X være større enn 0 om verdiene til de diverse elementene i X relativt til f er større enn 0, videre vil vekten til X være negativ om verdiene til alle de mulige konsekvensene i X er mindre enn 0, og endelig vil vekten være lik 0 om verdiene til alle elementene i X er lik 0. Som nevnt har vi tatt med dette

som et eget aksiom fordi vi ikke har sett hvordan det kan utledes fra de øvrige. Det samme gjelder AFV12 som sier at under de samme forutsetninger som i AFV11 er vekten til X lik 0 om sannsynlighetene for alle de diverse elementene i X ved alternativet h er lik 0. Intuitivt sett virker dette rimelig.

I det neste avsnittet vil egenskapene til vektfunksjoner bli behandlet mer generelt. Dernest vil vi se litt nærmere på en del elementære egenskaper til den funksjonen G = Mg(<u,VT;(h,x,t,w)(u,f)>: M(u) & u Inkl K;w(h,x,t)).

§2.5.1 Noen kommentarer til aksiomene om forventet verdi og vekt.

Er f en universell verdifunksjon og har man videre at Alt;w(h,x,t) vil Mg(<u,VT;(h,x,t,w)(u,f)>: M(u) & u Inkl K;w(h,x,t)) være det man kan kalle en endelig additiv mengdefunksjon. De satser som derfor generelt gjelder for endelig additive mengdefunksjoner vi derfor også gjelde spesielt for denne funksjonen. Det er derfor naturlig å se noe på egenskapene til endelig additive mengdefunksjoner på dette punkt. Dette vil gjøre det lettere for en når det gjelder å oppnå en oversikt over hva som følger fra aksiomene AFV1 – AFV10.

Vi gir først den følgende definisjon:

Definisjon 2.5.1.1

(i) Vi kaller en mengde ∏ over X for en Boolsk algebra over X, i symboler "Bool(∏,X)" hvis og bare hvis man har at X er en ikke-tom mengde, ø≠∏ Inkl Pt(X) og ∏ er lukket under endelig union og komplement med hensyn på X.

(ii) En mengde ∏ kalles for en Boolsk sigma-algebra over X, i symboler "s-Bool(∏,X)", hvis og bare hvis X er ikke-tom, ø≠∏ Inkl X, ∏ er lukket under komplement med hensyn på X og dessuten lukket under tellbar union, dvs. er
s: Nat –> ∏ så er også UN/n,0,∞/(s(n))ê∏.

(iii) Vi kaller G for en endelig additiv mengde-funksjon forbundet med den Boolske algebraen ∏ over X, is symboler FAS(G,∏,X) hvis og bare hvis G, ∏ og X oppfyller de følgende krav:

(a) Bool(∏,X)
(b) Func(G) & Dom(G)=∏ & Rgn(G) Inkl Reell
(c) (Aa)(Ab)(a,bê∏ & aΩb=ø –> G(aUb) = G(a)+ G(b))

Er G en endelig additiv mengdefunksjon forbundet med den Boolske algebra ∏ over X har man at G er en funksjon som tilordner ethvert element i ∏ et reellt tall. Den oppfyller også kravet (c).

I forbindelse med denne definisjonen gjør vi oppmerksom på at vi bruker notasjonen "c(a)" for å betegne komplementet til mengden a. Dette er naturligvis relativt til et univers som er spesifisert på forhånd. Dreier det seg om en Boolsk algebra ∏ over X og er aê∏ betegner "c(a)" mengden X–a. Hvor det kan oppstå misforståelser vil vi eksplisitt skrive "X–a".

De begrepene som er introdusert ved Definisjon 2.5.1.1 er av en rent mengdeteoretisk art. I definiens inngår ingen av de predikatene som ble innført i §1 utenom medlemskapspredikatet og begreper som kan defineres ved hjelp av dette og rent logiske begreper på en naturlig måte. Imidlertid kan de knyttes til begrepene vi har innført. Det følgende teorem er en sammenfatning av det som ble nevnt ovenfor nemlig at VT:(h,x,t,w)(x,f) kan oppfattes som en endelig additiv mengdefunksjon:

Teorem 2.5.1.2 Anta Alt;w(h,x,t) & VE(f). Sett X;0= K;w(h,x,t) og anta X;0≠ø.
Definer videre g0 ved:

g0 = Mg(<y,VT;(h,x,t,w)(y,f)>: y Inkl K;w(h,x,t)).

Under disse forutsetningene gjelder:

FAS(g0, Pt(X;0), X;0).

Bevis: Denne satsen følger umiddelbart ved hjelp av AFV7. **Q.E.D.**

Vi ønsker nå å vise en del elementære resultater om endelig additive mengdefunksjoner. Det følgende teorem angir en rekke grunnleggende egenskaper ved slike funsjoner:

Teorem 2.5.1.3 Anta FAS(G,∏,X). Da gjelder:

(i) a,bê∏ –> G(aΩc(b)) = G(aUb) – G(b)
(ii) a,bê∏ –> G(aΩ c(b)) = G(a)– G(aUb)
(iii) a,bê∏ –> G(aUb) = G(a) + G(b)– G(aΩb)
(iv) (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0) & a,bê∏. –> G(aUb) ≤ G(a)+ G(b)
(v) (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0) & a,bê∏ & b Inkl a –> G(a–b) = G(a)–G(b)
(vi) (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0) & a,bê∏ & b Inkl a –> G(b) ≤ G(a)
(vii) (Ax)(xê∏ & x≠ø –> G(x)>0) & a,bê∏ & b SInkl a –> G(b) < G(a)
(viii) G(ø) =0
(ix) (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0) & aê∏ –> G(a) ≤ G(X).

Bevis: Vi gir et helt detaljert bevis for denne satsen. Anta (+) FAS(G,∏,X). Da har man Bool(∏,X) og følgelig at følgende holder generelt for ∏ og X:

(a) (Aa)(Ab)(a,bê∏ –> aUb ê∏)
(b) (Aa)(aê∏ –> c(a) = (X–a)ê∏)

Fra (a) og (b) følger dessuten umiddelbart at ∏ er lukket under snitt siden man ar at aΩb = X–((X–a)U(X–b)) om a,bê∏. Vi har derfor:

(c) (Aa)(Ab)(a,bê∏ –> aΩbê∏)

Ad (i): Anta a,bê∏. Da har man (1) aUb = (aΩc(b))Ub. Videre må man ha at de to mengdene aΩc(b) og b er disjunkte. Derfor: (2) (aΩc(b)) Ω b. I lys av (c) ovenfor har man også (3) aΩbê∏. Fra (1) –(3), det forhold at bê∏ og definisjonen av endelig additiv mengdefunksjon følger:

G(aUb) = G((aΩc(b))Ub) = G(aΩc(b)) + G(b)

Men herav har man: G(aΩc(b)) = G(aUb) – G(b). Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Anta a,bê∏. Da har man i lys av (a) – (c) ovenfor at aΩc(b)ê∏. Videre har vi ved hjelp av ren Boolsk algebra at a = (aΩc(b)) U (aΩb) og dessuten at (aΩc(b)) Ω (aΩb) =ø. Fra disse forhold og det faktum at G forutsettes å være en endelig additiv mengdefunksjon følger: G(a) = G(aΩc(b)) + G(aΩb). Fra dette følger så i sin tur: G(aΩc(b)) = G(a) – G(aΩb). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Anta a,bê∏. Da har man ved hjelp av (a) – (c) at aΩc(b), c(a)Ωb og aΩb er elementer i ∏. Videre har man:

aUb = (aΩc(b)) U (aΩb) U (c(a)Ω b)

Man må dessuten ha at mengdene aΩc(b), c(a)Ωb og aΩb er innbyrdes disjunkte. Fra dette følger, siden G er en endelig additiv mengdefunksjon at:

G(aUb) = G((aΩc(b)) U (aΩb) U (c(a)Ω b)) =

= G(aΩc(b)) + G((aΩb) U (c(a)Ωb))
= G(aΩc(b)) + G(aΩb) + G(c(a)Ωb)
= G(b) – G(aΩb) + G(aΩb) + G(a) – G(aΩb) (Jmf. punkt (ii))
= G(a) + G(b) – G(aΩb)

Dette viser at (iii) holder.

Ad (iv): Anta a,bê∏ og (Ax)(xê∏ –> G(a)≥0). Man må da ha at (aΩb)ê∏ og derfor at (1) G(aΩb)≥0. I følge det som ble vist under punkt (iii) har man:

(2) G(aUb) = G(a) +G(b) – G(aΩb)

Siden a,bê∏ har vi G(a)≥0 og G(b)≥0. Derfor: G(a)+G(b)≥0. Fra dette, (1) og (2) følger derfor at G(aUb) ≤ (G(a) + G(b)).

Ad (v): Anta a,bê∏ og at b Inkl a. Anta (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0). Man har da (1) a–b = (aΩc(b))ê∏. Videre har man siden b Inkl a at (2) aUb = a. Fra (1) og (2) følger da i lys av punkt (i) i satsen at G(a–b) = G(a) – G(b). Dette viser at (v) holder.

Ad (vi) Anta a,bê∏ og at (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0). Anta b Inkl a. Vi har da at a = (a–b)Ub og at (a–b)Ωb =ø. Siden G er en endelig additiv mengdefunksjon følger da:

(1) G(a) = G((a–b)Ub) = G(a–b)+G(b)

Siden (a–b)ê∏ fordi a,bê∏ har man at G(a–b)≥0. Men fra dette og (1) følger det vi ønsker, nemlig: G(b)≤G(a).

Ad (vii): Anta (Ax)(xê∏ & x≠ø –> G(x)>0) & a,bê∏. Anta videre at b Sinkl a. Da har man b Inkl a. På samme måte som under foregående punkt har man da:

(1) G(a) = G((a–b)Ub) = G(a–b)+G(b)

Men fra forutsetningene følger (a–b)ê∏ og dessuten at (a–b)≠ø siden b SInkl a. Da må man ha: G(a–b)>0. Dette og (1) impliserer: G(b)< G(a).

Ad (viii). Man har øUø = ø og dessuten at øΩø= ø. Siden Bool(∏,X) har man at ∏ er ikke-tom og derfor at aê∏ for noe a. Det følger da at aΩ(X–a)=øê∏. Siden G er en additiv mengdefunksjon vi følgelig G(ø) = G(ø)+G(ø). Sett b = G(ø). Nå har man allment: (Ab) (bêReell –> (b+b=b <–> b=0). Det følger derfor siden b=G(ø)êReell at G(ø)=0. Dette viser at punkt (viii) holder.

Ad (ix): (Ax)(xê∏ –> G(x)≥0) & aê∏. Siden Bool(∏,X) har man at ∏=ø og derfor at det finnes bê∏ for noe b. Det følger da ved hjelp av (a) – (c) ovenfor at bU(X–b) = Xê∏. Vi har også om aê∏ at a Inkl Xê∏. Det følger da ved hjelp av (vi) at G(a)≤G(X). Dette viser at (ix) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.4 Anta FAS(G;1,∏;1,X;1) & FAS(G;2, ∏;2,X;2). Anta videre:

a;0,a;1ê∏;1 & a;0 Inkl a;1 og b;0,b;1ê∏;2 og b;0 Inkl b;1.

Under disse forutsetningene har man:

G;1(a;1–a;0) = G;2(b;1–b;0) –>

(i) G;1(a;1)>G;2(b;1) <–> G;1(a;0)>G;2(b;0)
(ii) G;1(a;1)=G;2(b;1) <–> G;1(a;0)=G;2(b;0)
(iii) G;1(a;1)<G;2(b;1) <–> G;1(a;0)<G;2(b;0)

Bevis: Fra forutsetningene og punkt (ii) i det forrige teoremet har man:

(1) G;1(a;1) = G;1(a;1–a;0) + G;1(a;0)
(2) G;2(b;1) = G;2(b;1–b;0) + G;2(b;0)

Siden G;1(a;1–a;0) = G;2(b;1–b;0) følger fra (1) og (2) at

(3) G;1(a;1) =G;2(b;1) <–> G;1(a;0)=G;2(b;0)

Sett a= G;1(a;1–a;0) Da har man

G;1(a;1) = a + G;1(a;0)
G;2(b;1) = a + G;2(b;0)

Er da G;1(a;1)>G;2(b;1) følger a + G;1(a;0) >a + G;2(b;0) og derfor G;1(a;0)>G;2(b;0).
Er G;1(a;1)<G;2(b;1) følger a + G;1(a;0) < a + G;2(b;0) og derfor G;1(a;0) <G;2(b;0).
Dette viser at påstandene (i) – (iii) holder. **Q.E.D.**

Ovenfor har vi innført begrepet endelig additiv mengdefunksjon. I det følgende vil vi med en endelig additiv målfunksjon f assosiert med en Boolsk algebra ∏ over X forstå en endelig additiv mengdefunksjon assosiert med ∏ og X der vi i tillegg har at (Ax)(xê∏ –> f(x)≥0). Vi bruker "FAM(f,∏,X)" som forkortelse for
"f er en endelig additiv målfunksjon assosiert med den boolske algebraen ∏ over X" og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.5.1.4 FAM(f,∏,X) <–> (FAS(f,∏,X) & (Ax)(xê∏ –> f(x)≥0))

Det følgende teorem kan oppfattes som et umiddelbart korollar til Teorem 2.5.1.3

Teorem 2.5.1.5
(i) FAM(f,∏,X) –> (FAS(f,∏,X)
(ii) FAM(f,∏,X) –>
(1) a,bê∏ –> f(aUb) ≤ f(a)+f(b)
(2) a,bê∏ –>. a Inkl b –> f(a)≤ f(b)
(3) a,bê∏ –>. b Inkl a –> f(a–b) = (f(a)–(f(b))

Bevis: Punkt (i) følger direkte fra Definisjon 2.5.1.4. Når det gjelder punkt (ii) følger dette fra definisjonen av "FAM(f,∏,X)" og Teorem 2.5.1.3, punktene (iv) –(vi). **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.6 FAS(f, Pt(X),X) & ø≠Y Inkl X –> FAS(f|Pt(Y),Pt(Y),Y)

Bevis: Anta (1) FAS(f,Pt(X),X) & ø≠Y Inkl X. Da har man åpenbart at Pt(Y)≠ø og det er klart at Pt(Y) er lukket under union og snitt med hensyn på Y. Man har altså Bool(Pt(Y),Y). Anta nå at a,bêPt(Y) & aΩb=ø. Da har man at aUbêPt(Y) og at Pt(Y) Inkl Pt(X). Siden (1) holder har man derfor at

f|Pt(Y)(aUb) = f(aUb) = f(a) + f(b).

Men a,bêPt(Y) derfor f(a) = f|Pt(Y)(a) og f(b) = f|Pt(Y)(b). Det følger at

f|Pt(Y)(aUb) = f|Pt(Y)(a) + f|Pt(Y)(b)

I lys av (1) er det klart at Dom(f|Pt(Y)) = Pt(Y) & Rgn(f|Pt(Y)) Inkl Reell. Dette viser at FAS(f|Pt(Y),Pt(Y),Y). **Q.E.D.**

Vi har også at det følgende teorem holder:

Teorem 2.5.1.6 Anta (i) Alt;w(h,x,t) & VE(f) & ø≠X Inkl K;w(h,x,t). Anta videre at følgende holder: (ii) (Ay)(yêX –> VT;(h,x,t,w)({y},f)>0). Sett tilslutt:

g = Mg(<VT;(h,x,t,w)(x,f),x>: x Inkl X). Da gjelder: FAM(g, Pt(X),X)

Bevis: Fra hypotesene (i) og (ii) og AVF10 følger:

(1) (Ay)(yêX –> P;(h,x,t)(y) * f(y) >0). Dette impliserer siden P;(h,x,t)(y)≥0 om Alt;w(h,x,t) & yêK;w(h,x,t) at:

(Ay)(yêX –> P;w(h,x,t)(y)>0) & (Ay)(yêX –> f(y)>0)

Fra dette, forutsetningene (i) og (ii) samt AFV11 følger om Z Inkl X at VT(h,x,t,w)(X,f)>0. Vi har derfor:

(2) (AZ)(zêPt(X) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)>0)

Fra forutsetningene følger at dersom man setter

g0 = Mg(<VT;(h,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h,x,t)) og X0 = K;w(h,x,t) at:

g = g0|Pt(X). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.2 at FAS(g0, Pt(X;0), X;0). Men far dette og Teorem 2.5.1.6 følger FAS(g, Pt(X),X). Dette, (2), definisjonen av g og definisjonen av relasjonen FAM impliserer FAM(g, Pt(X),X). **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.7 Anta FAS(f,Pt(X),X) & (Aa)(aêPt(X) & a≠ø –> f(a)<0) Da gjelder:

(i) (Aa)(Ab)(a,bêPt(X) & a Inkl b –> f(a)≥f(b))

(ii) (Aa)(Ab)(a,bêPt(X) & a SInkl b –> f(a)> f(b))

Bevis: Anta forutsetningene holder og at a,bêPt(X) og at a Inkl b. Man har da at b= (b–a)Ua siden a Inkl b. Videre har man at (b–a)Ωa=ø. Siden f er en endelig additiv mengdefunksjon følger da:

(1) f(b) = f(b–a)+f(a).

Siden (b–a)êPt(X) har vi i lys av forutsetningen f(b–a)≤0. Dette og (1) impliserer f(a) ≥ f(b). Har man a SInkl b følger at (b–a)≠ø. Fra forutsetningen følger da at f(b–a)<0. Dette og (1) gir en i så fall at f(a)>f(b). **Q.E.D.**

Bare en del av teoremene ovenfor inneholder beslutningsteoremer og referanser til aksiomene AFV1 – AFV11. Det dreier seg bare om Teorem 2.5.1.2 og Teorem 2.5.1.6. Resten av teoremene kan oppfattes som satser i mengdelæren. Vi vil nå se på flere satser av en mer beslutningsteoretisk karakter:

Teorem 2.5.1.8 Anta at følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t) & Alt;w(h2,x,t)

(ii) X Inkl K;w(h1,x,t) & Y Inkl K;w(h2,x,t)

(iii) a Inkl X & b Inkl Y & VE(f)

(iv) VT;(h1,x,t,w)(X–a,f) = VT;(h2,x,t,w)(Y–b,f)

Da gjelder:

(a) VT;(h1,x,t,w)(X,f) > VT;(h2,x,t,w)(Y,f) <–>
VT;(h1,x,t,w)(a,f) > VT;(h2,x,t,w)(b,f)

(b) VT;(h1,x,t,w)(X,f) = VT;(h2,x,t,w)(Y,f) <–>
VT;(h1,x,t,w)(a,f) = VT;(h2,x,t,w)(b,f)

(c) VT;(h1,x,t,w)(X,f) < VT;(h2,x,t,w)(Y,f) <–>
VT;(h1,x,t,w)(a,f) < VT;(h2,x,t,w)(b,f)

Bevis: Vi setter X1 = K;w(h1,x,t) og X2 = K;w(h2,x,t). Videre setter vi:

g1 = Mg(<VT;(h1,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl X1)

g2 = Mg(<VT;(h2,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl X2)

Fra Teorem 2.5.1.2 følger da at FAS(g1,Pt(X1),X1) og FAS(g2,Pt(X2),X2). Fra den siste av forutsetningene i teoremet, (iv), følger: g1(X1–a) = g2(X2–b). Fra dette, definisjonene av g1, g2, X1, X2 forutsetningene og Teorem 2.5.1.4 følger så

(a) – (c). **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.9 Anta

(i) Alt;w(h1,x,t) & aêK;w(h1,x,t)
(ii) Alt;w(h2,x,t) & bêK;w(h2,x,t)
(iii) VE(f) & f(a) = f(b)>0.

Da gjelder:

(a) VT;(h1,x,t,w)({a},f) > VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a)> P;w(h2,x,t)(b)
(b) VT;(h1,x,t,w)({a},f) =VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a)= P;w(h2,x,t)(b)
(c) VT;(h1,x,t,w)({a},f) < VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a) < P;w(h2,x,t)(b)

Bevis: Setningen er i det vesentlige en nokså triviell konsekvens av aksiom AFV10. Fra AFV10 og forutsetningene i teoremet følger:

(1) VT;(h1,x,t,w)({a},f) = f(a)*P;w(h,x,t)(a)
(2) VT;(h1,x,t,w)({b},f) = f(b)*P;w(h,x,t)(b)

Siden f(a)= f(b)>0 følger ved hjelp av (1) og (2) at (a) – (c) holder. **Q.E.D.**

Følgende sats er helt analog med Teorem 2.5.1.9 og bevises på den samme måten:

Teorem 2.5.1.10 Anta

(i) Alt;w(h1,x,t) & aêK;w(h1,x,t)
(ii) Alt;w(h2,x,t) & bêK;w(h2,x,t)
(iii) VE(f) & f(a) = f(b)<0.

Da gjelder:

(a) VT;(h1,x,t,w)({a},f) > VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a)< P;w(h2,x,t)(b)
(b) VT;(h1,x,t,w)({a},f) =VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a)= P;w(h2,x,t)(b)
(c) VT;(h1,x,t,w)({a},f) < VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> P;w(h1,x,t)(a) > P;w(h2,x,t)(b)

Det neste teoremet er også en nærmest triviell konsekvens av AFV10

Teorem 2.5.1.11 Anta

(i) Alt;w(h1,x,t) & aêK;w(h1,x,t)
(ii) Alt;w(h2,x,t) & bêK;w(h2,x,t)
(iii) VE(f) & P;w(h,x,t)(a) = P;w(h,x,t)(b)≠0

Da gjelder:

(a) VT;(h1,x,t,w)({a},f) > VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> f(a) > f(b)
(b) VT;(h1,x,t,w)({a},f) =VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> f(a) = f(b)
(c) VT;(h1,x,t,w)({a},f) < VT;(h2,x,t,w)({b},f) <–> f(a) < f(b)

Bevis: Fra forutsetningene og AFV10 følger på samme måte som ovenfor:

(1) VT;(h1,x,t,w)({a},f) = f(a)*P;w(h,x,t)(a)
(2) VT;(h1,x,t,w)({b},f) = f(b)*P;w(h,x,t)(b)

Men fra (1), (2) og forutsetning (iii) ser man lett at (a) – (c) følger. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.12 Anta Alt;w(h1,x,t) & aêK;w(h1,x,t) & VE(f). Anta videre at P;w(h,x,t)(a) = 0 v f(0) =0. Da gjelder: VT;(h,x,t,w)({a},f) =0

Bevis: Setningen følger umiddelbart ved hjelp av AFV10. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.13 Alt;w(h,x,t) & VE(f) –> VT;(h,x,t,w)(ø,f) =0

Bevis: Sett g0 = Mg(<VT;(h,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h,x,t)). Sett videre X0 = K;w(h,x,t). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.1 følger FAS(g0,Pt(X0),X0). Fra dette og Teorem 2.5.1.3, punkt (viii) følger g0(ø) = 0. Men

g0(ø) =VT;(h,x,t,w)(ø,f).

Dette viser at påstanden holder. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.14 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t) & Alt;w(h,x,t)
(ii) X Inkl K;w(h1,x,t) & Z Inkl Y Inkl K;w(h2,x,t)
(iii) VE(f)
(iv) VT;(h1,x,t,w)(X,f) = VT;(h2,x,t,w)(Z,f) & VT;(h2,x,t,w)(Y–Z,f) >0

Da gjelder: VT;(h2,x,t,w)(Y,f) >VT;(h1,x,t,w)(X,f)

Bevis: Sett g0 = Mg(<VT;(h2,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h2,x,t)). Sett videre X0 = K;w(h,x,t). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.1 følger

(1) FAS(g0,Pt(X0),X0).

Videre har vi Z,Y êPt(X0) og Z Inkl Y. Da følger Y = (Y–Z)UZ og ZΩ(Y–Z)=ø. I lys av (1) har man: g0(Y) = g0(Y–Z)+ g0(Z). Fra dette, forutsetning (iv) samt definisjonen av g0 følger g0(Y)>g0(Z). Herav følger i lys av forutsetning (iv) og definisjonen av g0 at VT;(h2,x,t,w)(Y,f) >VT;(h1,x,t,w)(X,f). **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.15 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t) & Alt;w(h,x,t)
(ii) X Inkl K;w(h1,x,t) & Z Inkl Y Inkl K;w(h2,x,t)
(iii) VE(f)
(iv) VT;(h1,x,t,w)(X,f) = VT;(h2,x,t,w)(Z,f) & VT;(h2,x,t,w)(Y–Z,f) <0

Da gjelder: VT;(h2,x,t,w)(Y,f) <VT;(h1,x,t,w)(X,f)

Bevis: Sett g0 = Mg(<VT;(h2,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h2,x,t)). Sett videre X0 = K;w(h,x,t). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.1 følger

(1) FAS(g0,Pt(X0),X0).

Videre har vi Z,Y êPt(X0) og Z Inkl Y. Da følger Y = (Y–Z)UZ og ZΩ(Y–Z)=ø. I lys av (1) har man: g0(Y) = g0(Y–Z)+ g0(Z). Fra dette, forutsetning (iv) samt definisjonen av g0 følger g0(Y)<g0(Z). Herav følger i lys av forutsetning (iv) og definisjonen av g0 at VT;(h2,x,t,w)(Y,f) <VT;(h1,x,t,w)(X,f). **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.16 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t)
(ii) X,Y Inkl K;w(h1,x,t) & X Inkl Y
(iii) VE(f)
(iv) (y)(yêY –> VT;(h,x,t,w)({y},f)>0)

Da gjelder: VT;(h,x,t,w)(X,f) ≤VT;(h,x,t,w)(Y,f)

Bevis: Sett g0 = Mg(<VT;(h,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h,x,t)). Sett videre X0 = K;w(h,x,t). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.1 følger

(1) FAS(g0,Pt(X0),X0).

Fra definisjonen av g0 og den fjerde forutsetningen følger:

(2) (Ay)(yêY –> g0({y})>0)

Fra dette følger ved hjelp av forutsetningene og AFV10 at

(Ay)(yêY –> P;w(h,x,t)(y)*f(y)>0). Fra dette har man i sin tur at

(Ay)(yêY –> P;w(h,x,t)(y)>0) og (Ay)(yêY –> f(y)>0)

Fra disse to forholdene, forutsetningene og aksiom AFV11 følger (3) g0(Y)>0.
Nå har man videre fra (2), siden X Inkl Y at (Ay)(yêX –> g0({y})>0). På samme måte som rett ovenfor kan man da bevise (4) g0(X)>0. Det følger også at man må ha (Ay)(yê(Y–X) –> g0({y})>0) og derfor, igjen ved hjelp av AFV11 at
(5) g(Y–X)≥0. I dette tilfelle holder imidlertid bare "≥" siden g(Y–X)=ø om Y–X=ø. Og dette siste tilfellet er ikke utelukket når man bare forutsetter X Inkl Y.
Fra det at X Inkl Y følger Y = (Y–X)UX og (Y–X)ΩX =ø. Videre har man at X,YêPt(X0). Fra dette og (1) følger (6) g0(Y) = g0(Y–X)+g0(X). Men siden g0(Y–X)≥0. følger herav at g0(Y)≥g0(X) og derfor i lys av definisjonen av g0 at VT;(h,x,t,w)(Y,f)≥ VT;(h,x,t,w)(X,f). Dette viser at satsen holder. Anta man istedet for X Inkl Y at X SInkl Y må man fra det som er nevnt ovenfor slutte at g(Y–X)>0. Fra dette, (3) og (6) følger da g0(Y)> g0(X), med andre ord at VT;(h,x,t,w)(Y,f) >VT;(h,x,t,w)(X,f). Vi har derfor ikke bare bevist teoremet ovenfor, men også satsen som umiddelbart følger. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.17 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t)
(ii) X,Y Inkl K;w(h1,x,t) & X SInkl Y
(iii) VE(f)
(iv) (y)(yêY –> VT;(h,x,t,w)({y},f)>0)

Da gjelder: VT;(h,x,t,w)(X,f) <VT;(h,x,t,w)(Y,f)

Det neste teoremet er dette:

Teorem 2.5.1.18 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t) og X Inkl K;w(h1,x,t)
(ii) VT;(h,x,t,w)(X,f)>0 v VT;(h,x,t,w)(X,f) <0
(iii) VE(f)

Da har man at X≠ø.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at X=ø. Fra forutsetningene om at ALt;w(h,x,t) og VE(f) følger da ved hjelp av Teorem 2.5.1.13 at VT;(h,x,t,w)(X,f)=0. Men da har man ¬(VT;(h,x,t,w)(X,f)>0) & ¬(VT;(h,x,t,w)(X,f) <0) som strider mot den andre forutsetningen i teoremet. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.19 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t)
(ii) X,Y Inkl K;w(h1,x,t) & X SInkl Y
(iii) VE(f)

(iv) (y)(yêY –> VT;(h,x,t,w)({y},f)<0)
Da gjelder: VT;(h,x,t,w)(X,f) >VT;(h,x,t,w)(Y,f)

Bevis: Sett g0 = Mg(<VT;(h,x,t,w)(Z,f),Z>: Z Inkl K;w(h,x,t)). Sett videre X0 = K;w(h,x,t). Fra forutsetningene og Teorem 2.5.1.1 følger

(1) FAS(g0,Pt(X0),X0).

Fra definisjonen av g0 og den fjerde forutsetningen følger:

(2) (Ay)(yêY –> g0({y})<0)

Fra dette følger ved hjelp av forutsetningene og AFV10 at

(Ay)(yêY –> P;w(h,x,t)(y)*f(y)<0). Fra dette har man i sin tur at

(Ay)(yêY –> P;w(h,x,t)(y)>0) og (Ay)(yêY –> f(y)<0)

Fra disse to forholdene, forutsetningene og aksiom AFV11 følger (3) g0(Y)<0.
Nå har man videre fra (2), siden X Inkl Y at (Ay)(yêX –> g0({y})<0). På samme måte som rett ovenfor kan man da bevise (4) g0(X)<0. Det følger også at man må ha (Ay)(yê(Y–X) –> g0({y})<0) og derfor, igjen ved hjelp av AFV11 at
(5) g(Y–X)<0 fordi vi forutsetter X SInkl Y. Fra det at X SInkl Y følger Y = (Y–X)UX og (Y–X)ΩX =ø. Videre har man at X,YêPt(X0). Fra dette og (1) følger (6) g0(Y) = g0(Y–X)+g0(X). Men siden g0(Y–X)<0 følger herav at g0(Y) < g0(X) og derfor i lys av definisjonen av g0 at VT;(h,x,t,w)(X,f)> VT;(h,x,t,w)(Y,f). Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.20 Anta følgende holder:

(i) ALt;w(h,x,t) & X Inkl K;w(h,x,t)
(ii) X = Z;1 U Z;2 & VE(f)
(iii) (Aa)(aêZ;1 –> VT;(h,x,t,w)({a},f) >0)
(iv) (Aa)(aêZ;1 –> VT;(h,x,t,w)({a},f) <0)

Da gjelder:

(a) VT;(h,x,t,w)(X)>0 <–> VT;(h,x,t,w)(Z1,f) > |VT;(h,x,t,w)(Z1,f)|
(b) VT;(h,x,t,w)(X) = 0 <–> VT;(h,x,t,w)(Z1,f) = |VT;(h,x,t,w)(Z1,f)|
(c) VT;(h,x,t,w)(X)<0 <–> VT;(h,x,t,w)(Z1,f) < |VT;(h,x,t,w)(Z1,f)|

Bevis: Fra forutsetningene (iii) og (iv) følger at Z;1ΩZ;2=ø. Fra dette og de andre forutsetningene følger ved hjelp av AFV7 :

(1) VT;(h,x,t,w)(X,f) = VT;(h,x,t,w)(Z;1,f) + VT;(h,x,t,w)(Z;2,f)

Vi har videre fra forutsetningene samt AFV11 at

(2) VT;(h,x,t,w)(Z;1,f) ≥0 & VT;(h,x,t,w)(Z;2,f) ≤ 0

Fra (1) og (2) følger (a) – (c) fordi det holder generelt for alle relle tall a,b,c at dersom a=b+c , b≥0 og c≤0 så gjelder a>0 <–> b>|c|. (Merk at |c| er absolutt-verdien til tallet c. |c|= c om c≥0 og |c|= –c ellers.) **Q.E.D.**

Teorem 2.5.1.21 Anta følgende holder:

(i) ALt;w(h,x,t) & VE(f) & ø≠ X Inkl K;w(h,x,t)

Da gjelder:

(a) (Ay)(yêX –> f(y)>0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)≥0
(b) (Ay)(yêX –> f(y)=0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)=0
(c) (Ay)(yêX –> f(y)<0) –> VT;(h,x,t,w)(X,f)≤0

Bevis: Har man (Ay)(yêX –> P;w(h,x,t)(y)>0) følger satsen umiddelbart ved hjelp av AFV11. Har man ¬(Ay)(yêX –> P;w(h,x,t)(y)>0) skiller vi mellom to tilfelle: (i) (Ay)

(yêX –> P;w(h,x,t)(y)=0) I så fall følger satsen ved hjelp av AFV12. (ii) Det finnes elementer y i X der P;w(h,x,t)(y)≠0. Vi setter da:

Z = Mg(y: yêX & P;w(h,x,t)(y)>0).

Det er klart at Z Inkl X. Vi har derfor i lys av AFV7 at:

(1) VT;(h,x,t,w)(X,f) = VT;(h,x,t,w)(X–Z,f) + VT;(h,x,t,w)(Z,f)

Vi viser bare at (a) holder i dette tilfellet. De resterende tilfellene overlates til leseren. Fra forutsetningen (Ay)(yêX –> f(y)>0) følger (Ay)(yêZ –> f(y)>0). Ved hjelp av AFV11 har man da:

(2) VT;(h,x,t,w)(Z,f)>0.

På den annen side har man (Ay)(yê(X–Z) –> P;w(h,x,t)(y)=0) og derfor ved hjelp av AFV12 at

(3) VT;(h,x,t,w)(X–Z,f) =0.

Men fra (1) –(3) følger det man ønsker: VT;(h,x,t,w)(X,f)>0. **Q.E.D.**

§2.6 Hovedaksiomene i teorien.

Hovedaksiomene i teorien er de følgende:

ATB 1 Til;<w,t>(x,h) <–> Alt;w(h,x,t) &
(Ef)(VE(f) & (Ah')(Alt;<w,t>(x,h') –>
FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f)))

ATB 2 Bør;<w,t>(x,h) <–> Alt;w(h,x,t) &
(Ef)(VE(f) & (Ah')(h'≠h & Alt;w(h',x,t) –>
FV;<w,t>(x,h,f)>FV;<w,t>(x,h',f)))

ATB 3 Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–> Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) &
(Ef)(VE(f) & FV;<w,t>(x,h;1,f)≥FV;<w,t>(x,h;2,f)))

Gitt disse aksiomene er teorien KET 1 i det vesentlige definert. Man kan, som vi tidligere har nevnt si at teorien KET1 er første-ordens teorien ZFCu(L;ê[Δ;2])[∑;0] utvidet med de aksiomene som vi har gjennomgått så langt, nemlig AKE1 – AKE14, ASN1 – ASN7, VER1 – VER4, AFV1 – AFV12 samt ATB1 – ATB3 som er listet opp rett ovenfor. Betegner man denne mengden med formler i L;ê[Δ;2] med ∑;1 har man at

KET1 = ZFCu(L;ê[Δ;2])[∑;0 U ∑;1].

La oss nå kommentere aksiomene ATB1 – ATB3 nærmere. Det bør først bemerkes at disse aksiomene kan oppfattes som definisjoner av de primitive predikatene "Til;<w,t>(x,h)", "Bør;<w,t>(x,h)" og "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)". Strengt tatt kan derfor disse utelates fra vokabularet av ikke-logiske predikater i L;ê[Δ;2].

For det andre bemerker vi at man på basis av de andre aksiomene i teorien og ATB3 kan vise at relasjonen Mg(<h;1,h;2>: Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)) er en *total preordning* , med andre ord en preferanserelasjon, over mengden av alle de handlingsalternativer som står åpne for personen x ved tidspunktet t i verdenen w, ie. Mg(h: Alt;w(h,x,t)). Man har derfor at det følgende teorem holder:

Teorem 2.6.1 (a) Alt;w(h,x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h)

(b) Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Mb;<w,x,t>(h;2,h;3) –>
Mb;<w,x,t>(h;1,h;3)

(c) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) –>

Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) v Mb;<w,x,t>(h;2,h;1)

Bevis: Man har at (a) i denne satsen følger umiddelbart fra punkt (c).
Ad (b): Anta (1) Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Mb;<w,x,t>(h;2,h;3). Fra dette og ATB3 følger at det finnes visse verdifunksjoner f og g slik at:

(2) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) &
VE(f) & FV;<w,t>(x,h;1,f)≥FV;<w,t>(x,h;2,f)

(3) Alt;w(h;2,x,t) & Alt;w(h;3,x,t) &
VE(g) & FV;<w,t>(x,h;2,f)≥FV;<w,t>(x,h;3,f)

Fra det at (4) VE(f) & VE(g) følger ved hjelp av aksiomet VER2 at det finnes c der man har:

(5) cêReell & (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)) & c>0.

Fra dette, (2), (3), AFV6 og AFV9 har man:

(6) FV;<w,t>(x,h;2,f) = c* FV;<w,t>(x,h;2,g)

(7) FV;<w,t>(x,h;3,f) = c* FV;<w,t>(x,h;3,g)

Fra (3), (6) og (7) følger: FV;<w,t>(x,h;2,f)≥ FV;<w,t>(x,h;3,f). Fra dette, (2) og ATB3 følger så Mb;<w,x,t>(h;1,h;3) som er det vi ønsker.

Ad (c): Anta (1) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t). I kraft av VER3 har man at det finne en f slik at (2) VE(f). Fra (1) og (2) følger ved hjelp av AFV1, AFV2 og AFV6 at det finnes z1 og z2 der:

(3) z1êReell & z1 = FV;<w,t>(x,h;1,f)

(4) z2êReell & z2 = FV;<w,t>(x,h;2,f)

Nå har man siden z1,z2êReell at z1≥z2 v z2≥z1. I det første tilfellet ser man at man har

(3) FV;<w,t>(x,h;1,f)≥FV;<w,t>(x,h;2,f). Fra dette, (1), (2) og ATB3 følger Mb;<w,x,t>(h;1,h;2). Satsen holder derfor i dette tilfellet. Har man z2≥z1 følger FV;<w,t>(x,h;2,f)≥FV;<w,t>(x,h;1,f). Fra dette, (1), (2) og ATB3 følger så på samme måte Mb;<w,x,t>(h;2,h;1). Også i dette tilfellet holder derfor satsen.

Dette avslutter beviset for teoremet. **Q.E.D.**

Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) innebærer at handlingsalternativet h;1 er minst like bra som handlingsalternativet h;2 for x ved t i verdenen w. Ved hjelp av dette begrepet kan man også definere hva som menes med at h;1 er like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w, i symboler "Lb;<w,x,t>(h;1,h;2)", og hva som menes med at handlingsalternativet h;1 er strengt bedre enn alternativet h;2 for x ved t i verdenen w, i symboler: "Sb;<w,x,t>(h;1,h;2)". Definisjonen kan formelt formuleres slik:

Definisjon 2.6.2

(a) Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–>
Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Mb;<w,x,t>(h;2,h;1)

(b) Sb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–>
Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) & ¬(Mb;<w,x,t>(h;2,h;1))

På basis av denne definisjonen, Teorem 2.6.1 og de øvrige aksiomer kan man lett utlede følgende sats.

Teorem 2.6.3

(i) Sb;<w,x,t>(h;1,h;2) v Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) –>
Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t)

(ii) Mb;<w,x,t>(h;1,h;2) <–> (Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) v Sb;<w,x,t>(h;1,h;2))

(iii) Sb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Sb;<w,x,t>(h;2,h;3) –> Sb;<w,x,t>(h;1,h;3)

(iv) Alt;w(h,x,t) –> ¬Sb;<w,x,t>(h,h)

(v) Sb;<w,x,t>(h;1,h;2) –> ¬Sb;<w,x,t>(h;2,h;1)
(vi) Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Lb;<w,x,t>(h;2,h;3) –> Lb;<w,x,t>(h;1,h;3)
(vii) Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) –> Lb;<w,x,t>(h;2,h;1)
(viii) Alt;w(h,x,t) –> Sb;<w,x,t>(h,h)
(ix) Lb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Sb;<w,x,t>(h;1,h;3) –>Sb;<w,x,t>(h;2,h;3)
(x) Sb;<w,x,t>(h;1,h;2) & Sb;<w,x,t>(h;3,h;1) –> Sb;<w,x,t>(h;3,h;2)

Vi overlater beviset for denne satsen til leseren fordi beviset er helt rutinemessig og øvelsespreget.

Fra påstandene ATB1 – ATB3 virker det også rimelig å tro at man skulle kunne definere predikatene "Til;<w,t>(x,h)" og "Bør;<w,t>(x,h)" ved hjelp av predikatet "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)". Det virker rimelig å si at et handlingsalternativ er tillatt hvis og bare hvis det er minst like bra som ethvert handlingsalternativ som står åpent, og at et handlingsalternativ bør utføres hvis og bare hvis det er det beste handlingsalternativet av alle de alternativene som står åpne. Dette siste innebærer at et handlingsalternativ bør utføres hvis og bare hvis det er et alternativ som er strengt bedre enn ethvert annet alternativ som står åpent. Det følgende teorem uttrykker disse to påstandene:

Teorem 2.6.4

(i) Til;<w,t>(x,h) <–>
Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))
(ii) Bør;<w,t>(x,h) <–>
Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> Sb;<w,x,t>(h,h'))

Bevis: Ad (i): Anta (1) Til;<w,t>(x,h). Vi ønsker i første omgang å vise at høyre side i (i) holder. Fra (1) og ATB1 følger at:

(2) Alt;w(h,x,t) og at det finnes en f der man har:
(3) VE(f) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f))

Anta for vilkårlig h' at

(4) Alt;w(h',x,t). Da har man åpenbart ved hjelp av (2) at
(5) Alt;w(h,x,t) & Alt;w(h',x,t). Videre følger fra (3) & (4) at
(6) VE(f) & FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f).

Fra (5), (6) og ATB3 følger Mb;<w,x,t>(h,h'). Men h' var en vilkårlig entitet der (4) holdt. Man har derfor: (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')). Fra dette og (2) følger så høyre side i (i).

Vi beviser så kondisjonalen mot venstre i (i). Anta:

(7) Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')). Fra VER3 følger eksistensen av f der:

(8) VE(f)

Anta for vilkårlig h' at (9) Alt;w(h',x,t). Fra dette og (7) følger:

(10) Mb;<w,x,t>(h,h') Fra dette følger i sin tur ved hjelp av ATB3 at det finnes g slik at:

(11) VE(g) & FV;<w,t>(x,h,g) ≥ FV;<w,t>(x,h',g). Fra (8) og (10) følger ved hjelp av VER2 at det finnes c slik at:

(12) cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x) = c* g(x))

Fra dette, (8), (11), AFV6 og AVF9 følger:

(13.1) FV;<w,t>(x,h,f) = c*FV;<w,t>(x,h,g)
(13.2) FV;<w,t>(x,h',f) = c*FV;<w,t>(x,h',g)

Siden c>0 følger fra dette og (10) at FV;<w,t>(x,h,f)≥ FV;<w,t>(x,h',f). Nå var h' vilkårlig

objekt slik at (9). Vi har derfor:

(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)≥ FV;<w,t>(x,h',f)). Dette, (7), (8) og ATB1 impliserer Til;<w,t>(x,h).

Ad (ii): Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre: Anta (1) Bør;<w,t>(x,h). Fra dette og ATB2 følger eksistensen av f slik at:

(2) Alt;w(h,x,t) og

(3) VE(f) & (Ah')(h'≠h & Alt;w(h',x,t) –>
FV;<w,t>)(x,h,f)> FV;<w,t>(x,h',f))

Anta for vilkårlig h' at (4) Alt;w(h',x,t) & h'≠h. Da følger ved hjelp av (3):

(5) FV;<w,t>)(x,h,f)> FV;<w,t>(x,h',f)

Fra dette følger trivielt: (6) FV;<w,t>)(x,h,f) ≥ FV;<w,t>(x,h',f). Dette, (2), (3), (4) og ATB3 impliserer (7) Mb;<w,x,t>(h,h'). Anta nå for reduktio ad absurdum at Mb;<w,x,t>(h',h). Da har man ved hjelp av ATB3 at det finnes g slik at:

(8) VE(g) & FV;<w,t>(x,h',g) ≥ FV;<w,t>(x,h,g)

Siden VE(f) har man da i lys av (8) og VER2 at det finnes c der:

(9) cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x)= c*g(x))

Fra dette, AFV6 og AFV9 følger:

(10.1) FV;<w,t>(x,h',f) = c* FV;<w,t>(x,h',g) og

(10.2) FV;<w,t>(x,h,f) = c* FV;<w,t>(x,h,g)

Siden c>0 har man fra dette og (8) at (10.1) FV;<w,t>(x,h',f) ≥ FV;<w,t>(x,h',f). Men dette strider åpenbart mot (5). Man har derfor

Mb;<w,x,t>(h,h') & ¬Mb;<w,x,t>(h',h)

Dette impliserer per definisjon Sb;<w,x,t>(h,h'). Nå var h' vilkårlig objekt slik at (4). Fra dette og (2) følger

(11) Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> Sb;<w,x,t>(h,h'))

Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (ii) holder.

La oss så se på kondisjonalen mot venstre. Anta (11) holder for å vise at Bør;<w,t>(x,h). Fra VER2 følger eksistensen av g slik at (12) VE(g). Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(+) (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> FV;<w,t>(x,h,g)>FV;<w,t>(x,h',g))

Anta (13) Alt;w(h',x,t) & h≠h' for vilkårlig h'. Fra dette og (11) følger

(14) Sb;<w,x,t>(h,h') og derfor:

(15) Mb;<w,x,t>(h,h') & ¬Mb;<w,x,t>(h',h)

Dette impliserer i lys av ATB3 siden vi har Alt;w(h,x,t) & Alt;w(h'x,t)

(16) VE(f) & FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f) og

(17) (Aq)(VE(q) –> ¬(FV;<w,t>(x,h',q)≥FV;<w,t>(x,h,q)))

Fra (16) og (17) følger:

(18) FV;<w,t>(x,h,f)>FV;<w,t>(x,h',f)

Fra (12), (16), VER2, AFV6 og AFV9 har man på samme måte som ovenfor at:

(19.1) FV;<w,t>(x,h',g) = c* FV;<w,t>(x,h',f)

(19.2) FV;<w,t>(x,h,g) = c* FV;<w,t>(x,h,f)

Fra dette og (18) følger så det man ønsker nemlig FV;<w,t>(x,h,g)>FV;<w,t>(x,h',g)
Dette avslutter beviset for Teorem 2.6.4. **Q.E.D.**

Er to handlingsalternativer begge tillatte er de like bra. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 2.6.5

Til;<w,t>(x,h) & Til;<w,t>(x,h') –> Lb;<w,x,t>(h,h')

Bevis: Anta (1) Til;<w,t>(x,h) & Til;<w,t>(x,h'). Fra dette og Teorem 2.6.4 (i) har man:

(2) Alt;w(h,x,t) &(Ah")(Alt;w(h",x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h"))

(3) Alt;w(h',x,t) &(Ah")(Alt;w(h",x,t) –> Mb;<w,x,t>(h',h"))

Fra (2) og (3) følger umiddelbart Mb;<w,x,t>(h,h') & Mb;<w,x,t>(h',h). Fra dette og definisjonen av predikatet Lb følger: Lb;<w,x,t>(h,h'). **Q.E.D.**

Anta R er en preferanserelasjon over en mengde X og at a er en delmengde av x. Med de R-maksimale elementene i a, Max(R,a), forstås da klassen av alle de x i a hvor man har at xRy for ethvert element y i a. Med de maksimale elementene i mengden av alle de handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t menes de alternativene som er minst like bra som ethvert alternativ i denne mengden. Vi betegner denne mengden med Max(w,x,t) og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.6.6 Max(w,x,t) = Mg(h: Alt;w(h,x,t) &
(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')))

Man kan nå lett vise at den følgende sats holder:

Teorem 2.6.7

(i) Til;<w,t>(x,h) <–> hêMax(w,x,t)

(ii) Bør;<w,t>(x,h) <–> Max(w,x,t) = {h}

Bevis: Ad (i): Anta Til;<w,t>(x,h). Dette er i lys av punkt (i) i Teorem 2.6.4 ekvivalent med:

Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')). Fra definisjonen av Max(w,x,t) ser man at dette i sin tur er ekvivalent med hêMax(w,x,t).

Ad (ii): Kondisjonalen mot høyre: Anta Bør;<w,t>(x,h). Fra dette og punkt (ii) i Teorem 2.6.4 følger:

(1) Alt;w(h,x,t) &(Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> Sb;<w,x,t>(h,h'))

Anta for vilkårlig h' at (2) Alt;w(h',x,t). Vi skiller mellom to tilfeller.

Tilfelle (i): h' = h. Da har man siden Mb er en total preordning at (Ah)(Alt;w(h,x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h)). Det følger i så fall at Mb;<w,x,t>(h,h) og derfor at Mb;<w,x,t>(h,h').

Tilfelle (ii): h'≠h. Da har man ved hjelp av (1) at Sb;<w,x,t>(h,h') og derfor i lys av definisjonen av Sb at Mb;<w,x,t>(h,h').

I begge tilfellene har man Mb;<w,x,t>(h,h'). Siden h' var en vilkårlig entitet slik at (2) har vi derfor vist:

(Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h')). Dette, den første konjunkten i (1) og definisjonen av "Max(w,x,t)" impliserer

(3) hêMax(w,x,t)

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes h;1 slik at

(4) h;1êMax(w,x,t) & h;1≠h. Fra dette og definisjonen av "Max(w,x,t)" følger:

(5) Alt;w(h;1,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h;1,h'))

Fra (1), (4) og (5) kan man slutte Sb;<w,x,t>(h,h;1). Fra dette følger så:

(6) Mb;<w,x,t>(h;h;1) & ¬ Mb;<w,x,t>(h;1,h) Fra den første konjunkten i (1) og den andre konjunkten i (5) følger imidlertid Mb;<w,x,t>(h;1,h). Dette strider mot (6). Det kan derfor ikke finnes h;1 som oppfyller kravet (4). Så langt har vi derfor bevist: hêMax(w,x,t) & ¬(Eh;1)(h;1êMax(w,x,t) & h;1≠h). Dette impliserer åpenbart Max(w,x,t) =

{h}.

Vi beviser så kondisjonalen mot venstre. Anta (7) Max(w,x,t) = {h}. Dette innebærer at hêMax(w,x,t) og derfor i lys av definisjonen av "Max(w,x,t)" at:

(8) Alt;w(h,x,t) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> Mb;<w,x,t>(h,h'))

Videre impliserer (7):

(9) ¬(E;h;1)(h;1êMax(w,x,t) & h;1≠h)

Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(10) (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h' ≠h –> Sb;<w,x,t>(h,h'))

Anta derfor for vilkårlig h' at (11) Alt;w(h',x,t) & h'≠h. Fra (11) og (8) følger

(12) Mb;<w,x,t>(h,h') Anta nå for reduktio ad absurdum:

(+) Mb;<w,x,t>(h',h). Vi ønsker under disse omstendigheter å vise at h'êMax(w,x,t). Anta derfor for vilkårlig h;2 at Alt;w(h;2,x,t). Fra dette og (8) følger Mb;<w,x,t>(h,h;2). Men fra dette og (+) har man siden Mb er en transitiv relasjon at Mb;<w,x,t>(h',h;2). Vi har altså:

(Ah;2)(Alt;w(h;2,x,t) –> Mb;<w,x,t>(h',h;2)). Dette og (11) impliserer i lys av definisjonen av "Max(w,x,t)" at h'êMax(w,x,t). Men fra dette og (11) følger i si tur (Eh;1)(h;1êMax(w,x,t) & h;1≠h) som strider mot (9). Vi kan derfor slutte at (+) ikke holder og derfor at ¬Mb;<w,x,t>(h',h). Dette og (12) impliserer Sb;<w,x,t>(h,h'). Vi har dermed vist at (10) holder.

Dette avslutter beviset for Teorem 2.6.7. **Q.E.D.**

§2.7 En modifikasjon av KET1. Teorien KET2

Vi skal senere drøfte visse konsekvenser ved teorien KET1 som virker mindre intuitive. Dette skjer i §11.1.1. Disse muligens motintuitive konsekvensene ved KET1 kan imidlertid ikke utledes om man modifiserer KET1 på den måten som vi skal beskrive i denne paragrafen.

Anta Δ er en utsagnsmengde ie. ΔêPt(U). Med klassen av tilstandsbeskrivelser over Δ forstår vi mengden av alle de utsagn z der det finnes en x Inkl Δ slik at z= SNu(x)Ω SNu(Mg(Neg(y): yê(Δ–x))). Vi betegner klassen av alle tilstandsbeskrivelser over en utsagnsmengde X med "TBS(X)". I forbindelse med tilstandsbeskrivelser nevner vi det følgende viktige normalformteorem for utsagn:

Teorem: (Normalformteorem). La Δ være en utsagnsmengde og la C(Δ) være den minste utsagnsmengden X som inneholder Δ og som er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon. Da gjelder, for ethvert utsagn xêC(Δ), at det finnes en utsagnsmengde Y Inkl TBS(Δ) slik at x = UNu(Y).

Man kan betrakte en teori som er genuint forskjellig fra KET1. Denne nye teorien vil bli betegnet "KET2".

Man får KET2 fra KET1 ved å gjøre de følgende forandringer:

For det første legger man til den følgende setning som nytt ikke-logisk aksiom i teorien:

AKE 15 Alt;w(h,x,t) –> TBS(K;w(h,x,t)) Inkl K;w(h,x,t)

Vi legger altså denne setningen til "AKE-familien" av aksiomer. Derimot endres nå:

AFV 6 Alt;w(h,x,t) & VE(f) & y = Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)) –>
FV; <w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(y,f)

I stedet for dette aksiomet benyttes:

AFV* 6 Alt;w(h,x,t) & VE(f) & y = Mg(u: Kon;<x,h,w,t>(u)). –>
FV; <w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(TBS(y),f)

Den forventede verdi til handlingsalternativet h er altså ikke lenger vekten til klassen av alle de mulige konsekvensene som kan inntreffe ved h, men det er vekten til mengden av alle tilstandsbeskrivelsene over mengden av de mulige konskvensene som kan inntreffe ved h.

Dermed har vi faktisk gitt en fullstendig beskrivelse av hvordan man får teorien KET2. Sammenfattende kan man si at man får teorien KET2 fra teorien KET1 ved å legge til aksiomet AKE 15 og ved å endre aksiomet AFV 6 til
AFV* 6. Ellers er de to teoriene helt like.

§3 Vid konsekvensialisme.

Hovedtanken i det som går under navnet "vid konsekvensialisme" synes å være at det å realisere et mulig handlingsalternativ som står åpent bør regnes som en mulig konsekvens ved dette handlingsalternativ selv. Tanken er altså denne: Anta h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w. Utsagnet at x fra og med tidspunktet t realiserer dette handlings-alternativet vil være det utsagnet som er sant i nøyaktig mengden av alle de mulige verdener w der man har at x fra og med tidspunktet t realiserer alternativet h, med andre ord Mg(w: Re;w(h,x,t)). Selve utsagnet vil derfor være identisk med μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))). Tanken er da altså den at utsagnet
μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) beskriver en mulig konsekvens som alltid er med i klassen av de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved tidspunktet t i verdenen w velger alternativet h. Med andre ord skal man ha:

μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) êMg(u: Kon;<x,h,w,t>(u))

Selve tesen kan da formaliseres slik innen for rammen av språket til teorien KET1:

VK1 For alle h,x,t og w gjelder:

Alt;w(h,x,t) –> μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) êMg(u: Kon;<x,h,w,t>(u))

Det skulle være klart at dersom μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) regnes som et utsagn som beskriver en mulig konsekvens som kan inntreffe om x ved t i verdenen w velger å realisere h så er sannsynligheten for at dette inntreffer lik 1. Denne påstanden impliseres ikke av VK1. Den kan formaliseres innenfor den språkrammen vi arbeider med her på den følgende måte:

VK2 Alt;w(h,x,t) –> P;w(h,x,t)(s;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))=1

Holder man seg til den definisjonen av teorien KET1 som ble gitt ovenfor er VK1 og VK2 ikke aksiomer i teorien. Det virker imidlertid ikke grunnløst å tenke seg at man kan utvide teorien med disse formlene som nye ikke-logisk aksiomer uten at motsigelser oppstår. Vi får da en ny teori som her ikke vil bli gitt et eget navn, men som vi vil betegne med "KET1[VK1,VK2]" når behovet oppstår. Tilsvarende kan man tenke seg KET2, som vi nettopp definerte ovenfor utvidet med disse aksiomene på den samme måten. Man får da som resultat teorien KET2[VK1,VK2].

Vi skal komme tilbake til særlig den første av disse to teoriene i forbindelse med visse teoremer som kan utledes i KET1 og som virker mindre rimelige. Dette skjer i §11.1.

§4 Teoremer i teorien KET 1

De følgende teoremer representerer endel enkle og helt elementære konsekvenser av aksiomene.

Teorem 4.1: Anta Pr;<x,h,w,t>(z,k) og definer p ved:
p= Mg(<k,z>: Pr;<x,h,w,t>(z,k)) Da gjelder følgende:

(a) Func(p)
(b) a,bêDom(p) –> K(a,b)êDom(p)
(c) aêDom(p) –> Neg(a)êDom(p)
(d) s;-1(I) ê Dom(p)
(e) a,bêDom(p) & s(a)Ωs(b)=ø –> p(D(a,b))=p(a)+p(b)
(f) aêDom(p) –> 0 ≤p(a)≤1
(g) p(s;-1(I))=1

Teorem 4.2:
(a) Bør;<w,t>(x,h) –> Til;<w,t>(x,h)
(b) Til;<w,t>(x,h) & (Ah')(Alt;w(h',x,t) & h≠h' –> ¬Til;<w,t>(x,h')).–> Bør;<w,t>(x,h)
(c) Bør;<w,t>(x,h) –> (Ah')((Alt;w(h',x,t) & h≠h')–> ¬Til;<w,t>(x,h'))

Teorem 4.3:
(a) VE(f) –> (Til;<w,t>(x,h) <–> (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f)))
(b) VE(f) –> (Bør;<w,t>(x,h) <–> (Ah')(h≠h'& Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)>FV;<w,t>(x,h',f)))
(c) Til;<w,t>(x,h) <–> (Af)(VE(f) –> (Ah')(Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)≥FV;<w,t>(x,h',f)))
(d) Bør;<w,t>(x,h) <–> (Af)(VE(f) –> (Ah')(h≠h'& Alt;w(h',x,t) –> FV;<w,t>(x,h,f)>FV;<w,t>(x,h',f)))

Teorem 4.4:
(i) Pv(x) –> (¬Nv(x) & ¬ Neu(x))
(ii) Nv(x) –> (¬Pv(x) & ¬ Neu(x))
(iii) Neu(x) –> (¬Nv(x) & ¬ Pv(x))
(iv) Pv(x) –> (Af)(VE(f) –> f(x) >0)
(v) Neu(x) –> (Af)(VE(f) –> f(x)=0)
(vi) Nv(x) –> (Af)(VE(f) –> f(x)<0)

Teorem 4.5:
(i) Sv(x,y) & Sv(y,z) –> Sv(x,z)
(ii) Sv(x,y) –> ¬Sv(y,x)
(iii) (Ax)¬Sv(x,x)
(iv) Lv(x,y) & L(y,z) –> Lv(x,z)

(v) Lv(x,y) –> Lv(y,x)
(vi) xêU –> Lv(x,x)
(vii) Lv(x,y) & Sv(y,z) –> Sv(x,z)
(viii) Lv(x,y) & Sv(z,y) –> Sv(z,x)
(ix) x,yêU –> (Lv(x,y) v Sv(x,y) v Sv(y,x))

Teorem 4.6:
(i) Lv(x,y) & Pv(x) –> Pv(y)
(ii) Lv(x,y) & Nv(x) –> Nv(y)
(iii) Lv(x,y) & Neu(x) –> Neu(y)
(iv) Sv(x,y) & Pv(y) –> Pv(x)
(v) Pv(x) & (Neu(y) v Nv(y)) –> Sv(x,y)
(vi) Neu(x) & Nv(y) –> Sv(x,y)
(vii) Neu(x) & Neu(y) –> Lv(x,y)
(viii) Sv(x,y) & Nv(x) –> Nv(y)
(ix) (Pv(x) v Neu(x)) & Nv(y) –> Sv(x,y)
(x) Neu(x) & Pv(y) –> Sv(y,x)

Vi skal nå etterhvert vise endel meget enkle og trivielle satser om forventet verdi. I denne forbindelse trenger vi den følgende meget enkle sats om endelig additive mengdefunksjoner:

Teorem 4.7 Anta FAS(G,Pt(X),X). Da har man for alle nêNat at hvis
x: {0,...,n}–(1-1)–> X
så gjelder:
G({x(0),....,x(n)}) = ∑/i,0,n/(G({x(i)}))

Bevis: Selvom det kan virke totalt overflødig tillater vi oss å gi et eksplisitt og detaljert bevis for denne påstanden. Satsen bevises ved induksjon på n. Basistrinnet er trivielt: Anta n=0 og at x: {0}–(1-1)–>X. Da har vi åpenbart at
G({x(0),...,x(n)}) = G({x(0)}) = ∑/i,0,0/(G({x(i)}) = ∑/i,0,n/(G({x(i)})
Anta satsen holder for nêNat. Vi skal vise at den da holder for n+1. Anta derfor for vilkårlig x at (1) x: {0,....,n+1} –(1-1)–> X. Definer y = x|{0,...,n}. Funksjonen y er med andre ord funksjonen x med domenet begrenset til {0,...,n}. Vi har da:
(2) y : {0,...,n}–(1-1)–> X
Etter induksjonshypotesen følger da:
(3) G({y(0),....,y(n)}) = ∑/i,0,n/(G({y(i)}))
Vi må videre ha i lys av definisjonen av y:
(4) (Am)(m<n+1 –> x(m)=y(m))
Nå har man siden G er endelig additiv at
(5) G({x(0),....,x(n+1)}) = G({x(0),...,x(n)})+ G({x(n+1)})
I lys av (3) –(5) har man:

$$
\begin{aligned}
G(\{x(0),....,x(n+1)\}) &= G(\{x(0),...,x(n)\}) + G(\{x(n+1)\}) \\
&= G(\{y(0),...,y(n)\}) + G(\{x(n+1)\}) \\
&= \sum/i,0,n/(G(\{y(i)\})) + G(\{x(n+1)\}) \\
&= \sum/i,0,n/(G(\{x(i)\})) + G(\{x(n+1)\}) \\
&= \sum/i,0,n+1/(G(\{x(i)\}))
\end{aligned}
$$

Dette viser at påstanden holder for n+1 om den holder for n. **Q.E.D.**

Det er noen tekniske smådetaljer som man bør gjøre rede for her. Det bør påpekes at vi forutsetter at ∑-notasjonen er definert induktivt slik:

$\sum/i,0,0/(F(i)) = F(0)$
$\sum/i,0,n+1/(F(i)) = \sum/i,0,n/(F(i))+ F(n+1)$

Gitt denne definisjonen kan man så vise at om (Am)(m<n+1 –> F(m)=G(m)) og nêNat så gjelder: $\sum/i,0,n/(F(i)) = \sum/i,0,n/(F(i))$. Dette viser man imidlertid lett ved induksjon. Vi nevner dette fordi vi ovenfor har benyttet oss av det forhold at dersom (4) holder så er det også slik at $\sum/i,0,n/(G(\{y(i)\})) = \sum/i,0,n/(G(\{x(i)\}))$.

Teorem 4.8 Anta Alt;w(h,x,t) & VE(f). Anta {k;0,...,k;n} Inkl K;w(h,x,t) (n≥1) i det vi forutsetter at de diverse x;j er distinkte. Da gjelder:

VT;(h,x,t,w)({k;0,...,k;n},f) = $\sum/j,0,n/(f(k;j)*P;w(h,x,t)(k;j))$

Har man at K;w(h,x,t) = {k;0,...,k;n} gjelder under disse forutsetningene:

FV;<w,t>(x,h,f) = $\sum/j,0,n/(f(k;j)*P;w(h,x,t)(k;j))$

Bevis: Definer X;j om j< n induktivt ved å sette

(i) X;0 = {k;0} og

(ii) X;(j+1) = X;j U {x;(j+1)}.

Da har man at (1) X;j = {k;0,...,k;j} for alle j der 0≤j≤n. Dette vises ved et trivielt induksjonsbevis: Man har at satsen holder for j=0 i kraft av (i). Anta den holder for r<n. Da har man i lys av induksjonshypotesen at X;r={k;0,...,k;r}. Ved hjelp av (ii) har man da:

X;(r+1) = X;rU{k;(r+1)}
= {x;0,...,x;r} U{x;(r+1)} = {k;0,....,k;(r+1)}

Vi viser så at

(2) VT;(h,x,t,w)(X;j,f) = $\sum/r,0,j/(f(k;r)*P;w(h,x,t)(k;r))$ om 0≤j≤n.

Også dette gjøres ved et enkelt induksjonsbevis. Man har at (2) holder for j=0. I dette tilfelle har man ved hjelp av AFV10:

(3) VT;(h,x,t,w)(X;0,f) = VT;(h,x,t,w)({k;0},f)
= f(k;0)* P;w(h,x,t)(k;0)
= $\sum/j,0,0/(f(k;j)*P;w(h,x,t)(k;j))$

Anta påstanden holder for q<n. Vi skal da vise at den holder for q+1. Man har ved hjelp av AFV7 og AFV10:

(4) VT;(h,x,t,w)(X;q+1,f) = VT;(h,x,t,w)(X;q U{k;(q+1)},f)
= VT;(h,x,t,w)(X;q,f) + VT;(h,x,t,w)({k;(q+1)},f)

(IH) = $\sum/r,0,q/(f(k;r)*P;w(h,x,t)(k;r))$ + f(k;q+1)*P;w(h,x,t)(k;q+1)
= $\sum/r,0,q+1/(f(k;r)*P;w(h,x,t)(k;r))$ (Jmf. def. av $\sum$)

Dette viser at (2) holder. Nå har man:

VT;(h,x,t,w)({k;0,...,k;n},f) = VT;(h,x,t,w)(X;n,f)
= $\sum/r,0,n/(f(k;r)*P;w(h,x,t)(k;r))$

Videre har man ved hjelp av AFV6 og (2):

FV;<w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),f)
= VT;(h,x,t,w)({k;0,....,k:n},f)
= $\sum/r,0,n/(f(k;r)*P;w(h,x,t)(k;r))$

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.9 Anta Alt;w(h,x,t) & VE(f). Anta K;w(h,x,t) = {k;0,...,k;n}Uy og at yΩ{k;0,...,k;n} = ø. Da gjelder:

FV;<w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(y,f) +$\sum/j,0,n/(f(k;j)*P;w(h,x,t)(k;j))$

Bevis: Denne satsen følger lett ved hjelp av det foregående teorem. Man har:

FV;<w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),f)
= VT;(h,x,t,w)({k;0,...,k;n}Uy ,f)
= VT;(h,x,t,w)({k;0,...,k;n},f) + VT;(h,x,t,w)(y,f) (AFV7)
= VT;(h,x,t,w)(y,f) +∑/j,0,n/(f(k;j)*P;w(h,x,t)(k;j))

Det siste følger ved hjelp av Teorem 4.8. **Q.E.D.**

Teorem 4.10 Anta Alt;w(h,x,t) & VE(f). Anta videre at VE(g). Anta aêDom(f) og at f(a) = k*g(a) der 0<kêReell. Da gjelder:

FV;<w,t>(x,h,f) = k* FV;<w,t>(x,h,g)

Bevis: Man har i lys av AFV6 og forutsetningene at:

(1) FV;<w,t>(x,h,f) = VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),f)
(2) FV;<w,t>(x,h,g) = VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),g)

Siden VE(f) & VE(g) har man i lys av VER2 at det finnes c slik at:

(3) cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)) Siden aêDom(f)=U (Jmf. VER1) følger at f(a)= c*g(a). Fra dette og forutsetningen om at f(a)=k*g(a) følger c*g(a) = k*g(a). Dette impliserer k=c. Fra (3), forutsetningene og AFV9 har man:

(4) VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),f) = c*VT;(h,x,t,w)(K;w(h,x,t),g)

Siden k=c har man derfor i lys av (1) og (2) det man ønsker:

FV;<w,t>(x,h,f) = k* FV;<w,t>(x,h,g).

Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Teorem 4.11 Anta Alt;w(h,x,t) &Alt;w(h',x,t)& VE(f). Anta videre at VE(g). Anta aêDom(f) og at f(a) = k*g(a) der 0<kêReell. Da gjelder:

(i) FV;<w,t>(x,h,f) > FV;<w,t>(x,h',f) <–>
FV;<w,t>(x,h,g) > FV;<w,t>(x,h',g)
(ii) FV;<w,t>(x,h,f) = FV;<w,t>(x,h',f) <–>
FV;<w,t>(x,h,g) = FV;<w,t>(x,h',g)
(iii) FV;<w,t>(x,h,f) < FV;<w,t>(x,h',f) <–>
FV;<w,t>(x,h,g) < FV;<w,t>(x,h',g)

Bevis: Fra forutsetningene og Teorem 4.10 følger:

(1) FV;<w,t>(x,h,f) = k* FV;<w,t>(x,h,g)
(2) FV;<w,t>(x,h',f) = k* FV;<w,t>(x,h',g)

Sett nå per definisjon a1 = FV;<w,t>(x,h,f) og a2 = FV;<w,t>(x,h',f). Sett videre: b1 = FV;<w,t>(x,h,g) og b2 = FV;<w,t>(x,h',g). Da har man om b1>b2 at b1*k>b2*k og derfor i lys av (1) og (2) at a1>a2. Har man at b1=b2 følger umiddelbart at b1*k=b2*k og derfor at a1=a2 i lys av (1) og (2). Er endelig b1<b2 følger b1*k<b2*k og derfor a1<a2. Dette viser at kondisjonalene mot venstre i (i) – (iii) i teoremet holder. Kondisjonalene mot høyre: Anta a1>a2. Nå har man:

(3) b1>b2 v b1=b2 v b1<b2.

Er b1=b2 følger som rett ovenfor at a1=a2 som er umulig. Er b1<b2 følger også som rett ovenfor at a1<a2 som er umulig. Det følger at b1>b2. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (i) holder. Kondisjonalene mot høyre i (ii) og (iii) bevises på en helt analog måte. **Q.E.D.**

Med utgangspunkt i aksiomene om forventet verdi og vekt samt de teoremene vi hittil har utledet kan man bevise en rekke temmelig trivielle satser og mer eller mindre spesielle

teoremer om forventet verdi. For å illustrere metoden vil vi gi en del eksempler.

Teorem 4.12 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) & VE(f)
(ii) K;w(h;1,x,t) = {a;1,a;2} U y1 & {a;1,a;2}Ωy1 =ø
(iii) K;w(h;2,x,t) = {b} U y2 & {b}Ωy2 =ø
(iv) VT;(h,x,t,w)(y1,f) = VT;(h,x,t,w)(y2,f)
(v) f(a;1) =10 & f(a;2) = 9 & f(b) =12
(vi) P;w(h,x,t)(a;1) = 1/2 & P;w(h,x,t)(a;2) = 1/3 & P;w(h,x,t)(b) = 1/2

Da gjelder FV;<w,t>(x,h;1,f) > FV;<w,t>(x,h;2,f)

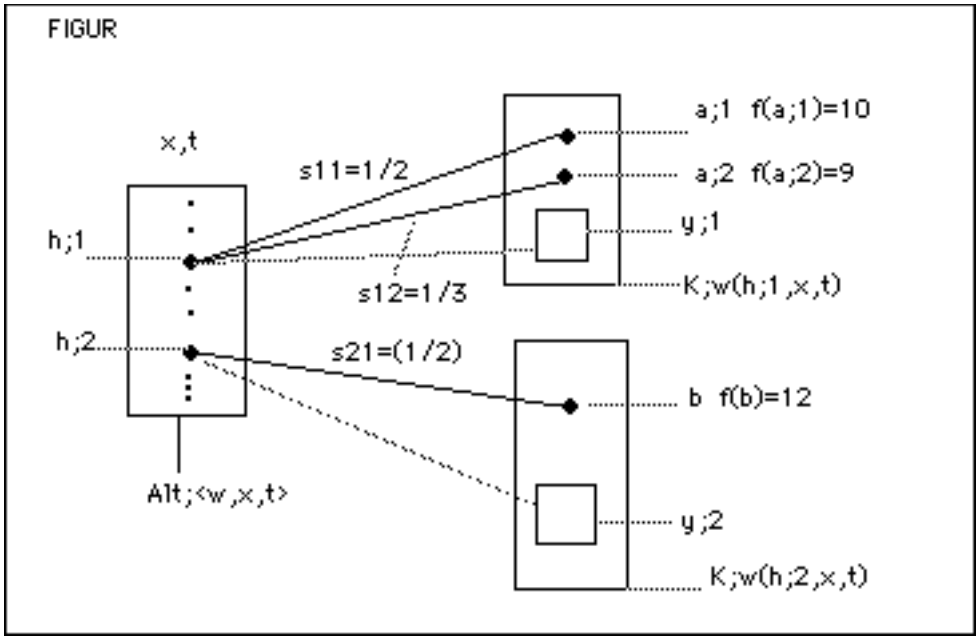
Bevis: Fra forutsetningene og Teorem 4.9 har man:

(1) FV:<w,t>(x,h;1,f) = VT;(h,x,t,w)(y;1,f) + ∑/i,1,2/(P;w(h,x,t)(a;i)*f(a;i)
= VT;(h,x,t,w)(y;1,f) +(1/2)*10 + (1/3)*9
= VT;(h,x,t,w)(y;1,f) +8

(2) FV:<w,t>(x,h;2,f) = VT;(h,x,t,w)(y;2,f) + P;w(h,x,t)(b)*f(b)
= VT;(h,x,t,w)(y;2,f) +(1/2)*12
= VT;(h,x,t,w)(y;2,f) +6

Fra (1) og (2) og forutsetning (iv) følger så FV;<w,t>(x,h;1,f) > FV;<w,t>(x,h;2,f). **Q.E.D.**

Dette teoremet kan anskueliggjøres ved hjelp av det følgende diagram:



På figuren er antydet klassen av de handlingsalternativene personen x har ved tidspunktet t i verdenen w. To av disse alternativene: h;1,h;2 er antydet. Videre er klassen av mulige konsekvenser ved henholdsvis h;1 og h;2, K;w(h;1,x,t) og K;w(h;2,x,t) antydet til høyre på figuren. Der har vi også anskueliggjort verdiene og sannsynlighetene til de tre mulige konsekvensene a;1, a;2 og b. Vi skal kalle et slikt diagram for et beslutningsteoretisk diagram. På et slikt diagram fører man opp klassen av handlingsalternativer, ved hvert alternativ klassen av mulige konsekvenser og for hver konsekvens i hver konsekvensklasse verdien til konsekvensen og dens sannsynlighet.

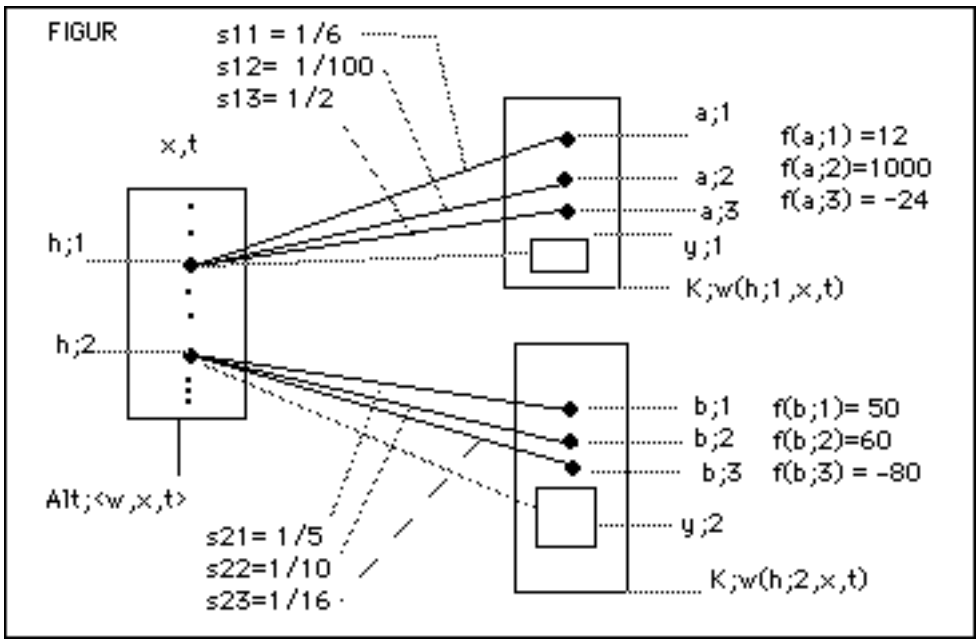
Som et annet eksempel på et teorem av dette mildt interessante slag nevner vi:

Teorem 4.13 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) & VE(f)
(ii) K;w(h;1,x,t) = {a;1,a;2,a;3} U y1 & {a;1,a;2,a;3}Ωy1 =ø
(iii) K;w(h;2,x,t) = {b;1,b;2,b;3} U y2 & {b;1,b;2,b;3}Ωy2 =ø
(iv) VT;(h,x,t,w)(y1,f) = VT;(h,x,t,w)(y2,f)
(v) f(a;1) =12 & f(a;2) = 1000 & f(a;3) =-24
(vi) f(b;1) =50 & f(b;2) = 60 & f(b;3) =-80
(vii) P;w(h,x,t)(a;1) = 1/6 & P;w(h,x,t)(a;2) = 1/100 & P;w(h,x,t)(a;3) = 1/2
(viii) P;w(h,x,t)(b;1) = 1/5 & P;w(h,x,t)(b;2) = 1/10 & P;w(h,x,t)(b;3) = 1/16

Da gjelder FV;<w,t>(x,h;1,f) < FV;<w,t>(x,h;2,f)

Beviset for denne satsen er av akkurat samme type som for det foregående teorem og overlates derfor til leseren. Også her kan innholdet i teoremet illustreres ved et beslutningsteoretisk diagram. Se figuren på neste side:



Som et ytterligere eksempel på teoremer av denne trivielle typen nevner vi:

Teorem 4.14 Anta følgende holder:

(i) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t) & VE(f)
(ii) K;w(h;1,x,t) = {a} U y1 & {a}Ωy1 =ø
(iii) K;w(h;2,x,t) = {b;1,b;2} U y2 & {b;1,b;2}Ωy2 =ø
(iv) VT;(h,x,t,w)(y1,f) = VT;(h,x,t,w)(y2,f)
(v) k = f(b;2)/f(a)
(vi) P;w(h,x,t)(a) = s11 & P;w(h,x,t)(b;1) = s21 & P;w(h,x,t)(b;2) = s22

Da gjelder

FV;<w,t>(x,h;1,f) = FV;<w,t>(x,h;2,f) <–> f(b;1) = f(a)*((s11–k*s22)/s21)

Bevis: I lys av forutsetningene i teoremet og Teorem 4.9 har man:

(1) FV:<w,t>(x,h;1,f) = VT;(h,x,t,w)(y;1,f) +s11*f(a)
(2) FV:<w,t>(x,h;2,f) = VT;(h,x,t,w)(y;2,f) + s21*f(b;1)+s22*f(b;2)

Man har derfor at

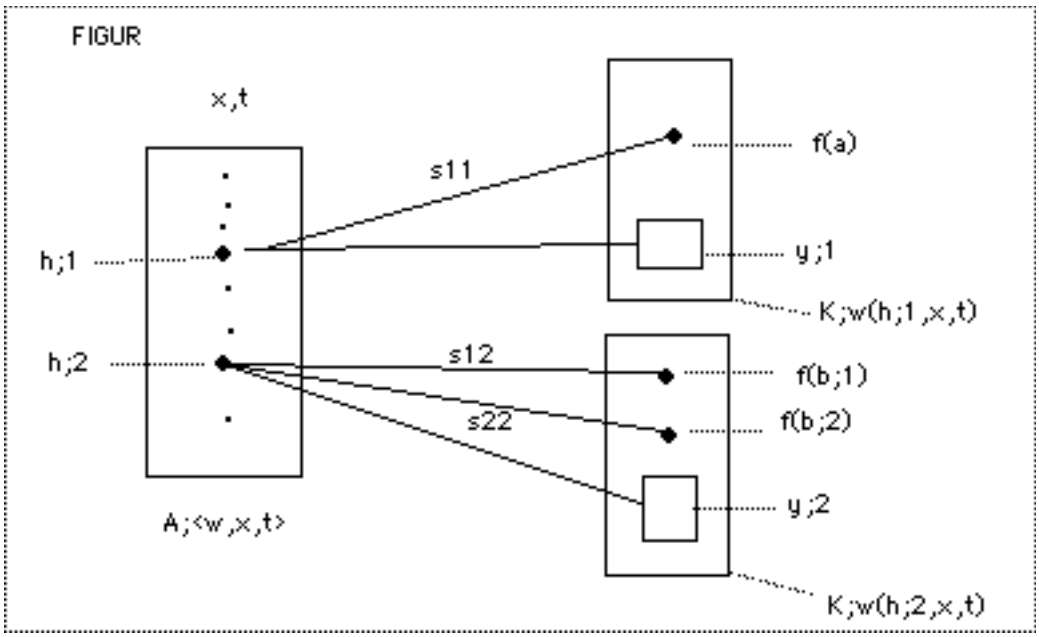
(3) FV;<w,t>(x,h;1,f) = FV;<w,t>(x,h;2,f) <–> s11*f(a) = s21*f(b;1)+s22*f(b;2)

Høyre side er her ekvivalent med: (4) s21*f(b;1) = s11*f(a) – s22*f(b;2). Siden vi per hypotese har at k = f(b;2)/f(a) er (4) naturligvis ekvivalent med: s11*f(a) = s21*f(b;1)+s22*f(b;2). **Q.E.D.**

Figuren på neste side gir en illustrasjon til dette teoremet.

Vi tror det kanskje kan være mulig å få ut mer som kan være interessant fra en matematisk synsvinkel fra aksiomene om forventet verdi og vekt. La oss kort skissere enkelte problemstillinger som i hvert fall prinsipielt kan tenkes å gjøres til gjenstand for en grundigere analyse og som kan være relevante.

Vi tenker oss en person x ved et tidspunkt t befinner seg i en valgsituasjon i verdenen w. Klassen av alternativer som står åpne er A;<w,x,t>. La oss anta at f er en etisk verdifunksjon, ie. at VE(f) og at h;1,....,h;rê A;<w,x,t>. La oss forutsette at K;w(a;i,x,t) = {k;1,....,k;n} for alle iê{1,...,r}. Vi setter P;w(h;i,x,t)(k;j) = s;(i,j) for <i,j>ê{1,...,r}X {1,...n} og setter FV;<w,t>(x,h;i,f) = v;i for i=1,...,r.



Man kan nå f.eks. spørre om en karakteristikk av sannsynlighetene s;(i,j) gitt at man kjenner v;1,....,v;r og f(k;1),...,f(k;n). Man må med andre ord analysere et ligningssytem av typen:

v;1 = s;(1,1)*f(k;1)+ s(1,2)*f(k;2)+ ... + s;(1,n)*f(k;n)
v;2 = s;(2,1)*f(k;1)+ s(2,2)*f(k;2)+ ... + s;(2,n)*f(k;n)
....
v;r = s;(r,1)*f(k;1)+ s(r,2)*f(k;2)+ ... + s;(r,n)*f(k;n)

For ligningssytemer av denne type har man naturligvis en allerede etablert teori. Forutsetter man videre at sannsynlighetene s;(p,t) der pê{2,...,r} og tê{1,...,n} kan uttrykkes som lineære

funksjoner av s;(1,1),...,s;(1,n) får man å løse et lineært ligningssystem med med n ukjente, viz. s;(1,1),....,s(1,n). Et problem av denne art vil naturligvis være et rent matematisk-teknisk problem hvor velkjente metoder og resultater fra matrise og vektor-regningen kan trekkes inn. En annen sak er hvor stor praktisk interesse problemer av denne typen har. Det virker ufornuftig å underkjenne betydningen av dette og overse betydningen og relevansen av denne typen problemer.

§4.1 Noen flere teoremer i teorien KET 1 som angår verdier

Predikatet "z er et reelt tall som angir størrelsen til den indre etiske verdien til det som beskrives av utsagnet x i forhold til den indre etiske verdi til det som beskrives av utsagnet y" inngår ikke som noe primitivt predikat i teorien KET 1. Man ser dette raskt ved å inspisere listen over de primitive predikatene som inngår i definisjonen av språket til KET 1 Vi skal her forkorte dette predikatet med "m(z,x,y)". Spørsmålet er nå om man kan definere dette predikatet innenfor rammen av KET 1. La oss foreta noen overlegninger når det gjelder dette. Anta først at m(z,x,y), mao at z er et reelt tall som angir størrelsen til den indre etiske verdien til det som beskrives av utsagnet x i forhold til den indre etiske verdi til det som beskrives av utsagnet y. Da synes det rimelig å hevde at følgende påstander skulle holde:

(i) z er et reellt tall.
(ii) x og y er utsagn, ie. x,yêU.
(iii) Er f en vilkårlig etisk verdifunksjon over klassen av utsagn, mao har man at VE(f), holder det at z = f(x)/f(y).
(iv) Er f en vilkårlig etisk verdifunksjon over klassen av utsagn synes det også rimelig å kreve at f(x)≠0 samt at f(y)≠0.

Det omvendte virker heller ikke fullstendig urimelig. Holder punktene (i) – (iv) skulle det også være rimelig å hevde at m(z,x,y).

Disse, nokså løse, overveielsene er bakgrunnen for den følgende definisjon:

Definisjon 4.1.1 m(z,x,y) <–> zêReell & x,yêU &
(Af)(VE(f) –> z= f(x)/f(y)) & (Af)(VE(f) –> (f(x) ≠0 & f(y)≠0))

Ser man på denne definisjonen er det også nærliggende å bruke følgende lesemåte i forbindelse med "m(z,x,y)", nemlig "Den indre etiske verdi til det som beskrives av utsagnet x er z ganger så stor som den indre verdi til det som beskrives av utsagnet y".

Gitt definisjonen ovenfor kan vi bevise de følgende teoremer om relasjonen m på basis av de aksiomene som definerer teorien KET 1.

Teorem 4.1.1 (i) x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)(m(z.x,y))
(ii) m(z,x,y) –> zêReell & x,yêU
(iii) m(z,x,y) –> (E!z)(m(z,x,y))
(iv) m(z,x,y) –> m(z;-1,y,x)
(v) m(z;1, x,y) & m(z;2,y,u) –> m(z;1*z;2,x,u)
(vi) m(z,x,y) –> x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u))
(vii) m(z,x,x) –> z=1
(viii) m(z,x,y) –> m(1,x,x) & m(1,y,y)
(ix) m(z,x,y) &Pv(x) & Nv(y) –> z<0

(x) $m(z,x,y) \& Pv(x) \& Pv(y) \rightarrow z>0$
(xi) $m(z,x,y) \& Nv(x) \& Nv(y) \rightarrow z>0$
(xii) $m(z,x,y) \rightarrow z\neq 0$
(xiii) $m(z,x,y) \& Pv(y) \& z>0 \rightarrow Pv(x)$
(xiv) $m(z,x,y) \& Nv(y) \& z>0 \rightarrow Nv(x)$

Bevis: Vi overlater det detaljerte beviset for denne satsen til leseren fordi det er av en elementær og øvelsespreget natur. **Q.E.D.**

Teorem 4.1.2 (i) $m(z,x,y) \rightarrow (Lv(x,y) \leftrightarrow z=1)$
(ii) $m(z,x,y) \& Pv(x) \& Pv(y) \rightarrow (Sv(x,y) \leftrightarrow z>1)$
(iii) $m(z,x,y) \rightarrow Nv(x) \& Nv(y) \rightarrow (Sv(x,y) \leftrightarrow z<1)$

Bevis: Også her overlater vi beviset til leseren med samme begrunnelse som ved den forrige satsen. **Q.E.D.**

§4.2 En svakere verditeori

I språket til KET 1 er det bare "f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn", "VE(f)", som er det eneste primitive predikatet som kan brukes til å uttrykke påstander som har med verdier å gjøre. De andre verditeoretiske predikatene som vi har operert med så langt:

(i) "Pv(x)" – " x er et utsagn som beskriver noe som har positiv indre etisk verdi "
(ii) "Nv(x)" – " x er et utsagn som beskriver et forhold som har negativ indre etisk verdi"
(iii) "Neu(x)" – "x er et utsagn som beskriver et forhold som er nøytralt med hensyn på indre etisk verdi"
(iv) "Sv(x,y)" – " x er et utsagn som beskriver et forhold som har større indre etisk verdi enn det som beskrives av utsagnet y"
(v) "Lv(x,y)" – "x er et utagn som beskriver et forhold som har like stor indre etisk verdi i seg selv som det forhold som beskrives av utsagnet y"
(vi) "m(z,x,y)" – "z er et reelt tall som angir størrelsen til den indre etiske verdien til det som beskrives av utsagnet x i forhold til den indre etiske verdi til det som beskrives av utsagnet y"

har så blitt innført ved at vi har definert dem ved hjelp av predikatet "VE(f)" innenfor rammen av språket til KET 1. Nå er den verditeorien som er innebygget i KET 1 meget "sterk" i en viss forstand. Den impliserer at ethvert utsagn beskriver noe som verdimessig sett kan sammenlignes med det ethvert annet utsagn beskriver. Den impliserer også at det gir mening å spørre om, for ethvert par av utsagn x,y som ikke er verdinøytrale hvor mye større verdi x har i forhold til y. Intet av dette er selvfølgelig ukontroversielt. Tvertimot er det høyst omstridt. Det kan derfor være av interesse å betrakte teorier om indre etisk verdi som er svakere enn den som så langt har blitt presentert.

I dette avsnittet skal vi gjøre dette. Vi tar vårt utgangspunkt i egenskapsteorien E;3 som vi tidligere har gitt en utførlig drøftelse av. Vi utvider nå språket til E;3 med predikatene (i) – (vi) ovenfor som nye primitive predikater. Som nye ikke-logiske aksiomer for disse predikatene tar vi vårt utgangspunkt i dem vi nå gir en oversikt over.

Når det gjelder relasjonene Sv(x,y) og Lv(x,y) skal vi anta at disse representerer en pre-ordning av området av utsagn:

AV1 Sv(x,y) v Lv(x,y) –> x,yêU
AV2 Sv(x,y) & Sv(y,z) –> Sv(x,z)
AV3 (Ax)(xêU –> ¬Sv(x,x))
AV4 Sv(x,y) –> ¬Sv(y,x)
AV5 Lv(x,y) & Lv(y,z) –> Lv(x,z)
AV6 (Ax)(xêU –> Lv(x,x))
AV7 Lv(x,y) –> Lv(y,x)
AV8 Lv(x,y) & Sv(x,z) –> Sv(y,z)
AV9 Lv(x,y) & Sv(z,x) –> Sv(z,y)

Som man ser antas det ikke at alle utsagn er sammenlignbare med hensyn på verdi, mao. at følgende gjelder for alle utsagn x,y : Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x). Teorien ovenfor er derfor meget svak.

Når det gjelder predikatene "Pv(x)", "Nv(x)" og "Neu(x)" skal vi i det følgende forutsette:

AV10 Pv(x) v Nv(x) v Neu(x) –> xêU
AV11 xêU –> Pv(x) v Nv(x) v Neu(x)
AV12 xêU –> (Neu(x) <–> (¬Pv(x) & ¬Nv(x)))
AV13 Pv(x) & Neu(y) –> Sv(x,y)
AV14 Nv(x) & Neu(y) –> Sv(y,x)
AV15 Pv(x) & Nv(y) –> Sv(x,y)
AV16 Pv(x) &Sv(y,x) –> Pv(y)
AV17 Nv(x) & Sv(x,y) –> Nv(y)
AV18 Neu(x) & Neu(y) –> Lv(x,y)

Når det gjelder relasjonen m(z,x,y) skal vi forutsette at det følgende aksiom er blandt de ikke-logiske aksiomene:

AV19 (i) m(z,x,y) –> zêReell & x,yêU
(ii) m(z,x,y) –> (E!z)(m(z,x,y))
(iii) m(z,x,y) –> m(z;-1,y,x)
(iv) m(z;1, x,y) & m(z;2,y,u) –> m(z;1*z;2,x,u)
(v) m(z,x,y) –> x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u))
(vi) m(z,x,x) –> z=1
(vii) m(z,x,y) –> m(1,x,x) & m(1,y,y)
(viii) m(z,x,y) &Pv(x) & Nv(y) –> z<0
(ix) m(z,x,y) & Pv(x) & Pv(y) –> z>0
(x) m(z,x,y) & Nv(x) & Nv(y) –> z>0
(xi) m(z,x,y) –> z≠0
(xii) m(z,x,y) & Pv(y) & z >0 –> Pv(x)
(xiii) m(z,x,y) & Nv(y) & z>0 –> Nv(x)
(xiv) m(z,x,y) –> (Lv(x,y) <–> z=1)
(xv) m(z,x,y) & Pv(x) &Pv(y) –> (Sv(x,y) <–> z>1)
(xvi) m(z,x,y) –> Nv(x) &Nv(y) –> (Sv(x,y) <–> z<1)

Vi har nå sett at man i teorien KET 1 kan utlede aksiomene AV1 – AV19 gitt de definisjonene som tidligere har blitt presentert av predikatene (i) – (vi). Spørsmålet er nå om man kan gå den andre veien. Gitt predikatene (i) – (vi) som primitive og gitt aksiomene AV1 – AV19 kan vi da vise at det er mulig å definere et predikat "VE(x)" som oppfyller de verditeoretiske aksiomene VER 1 – VER 4 og som dessuten er slik at man har at de følgende påstander holder?

(a) Pv(x) <–> (xêU & (Ef)(VE(f) &f(x)>0))
(b) Nv(x) <–> (xêU & (Ef)(VE(f) &f(x)<0))
(c) Neu(x) <–> (xêU & (Ef)(VE(f) &f(x)=0))
(d) Sv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE(f) &f(x)>f(y))
(e) Lv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE(f) &f(x)=f(y))
(f) m(z,x,y) <–> zêReell & x,yêU &
(Af)(VE(f) –> z= f(x)/f(y)) & (Af)(VE(f) –> (f(x) ≠0 & f(y)≠0))

Saken er at dette er tilfelle. La oss kalle to utsagn x og y for kvantitativt sammenlignbare hvis og bare hvis det finnes z slik at m(z,x,y) dvs. hvis det finnes et reellt tall y som angir hvor mye mer verdifullt i seg selv det som utsagnet x beskriver er i forhold til det utsagnet y beskriver. Er x et utsagn betegner vi med "D;x" mengden av alle de utsagn som er kvantitativt sammenlignbare med utsagnet x. Dette uttrykket defineres formelt på følgende måte:

Definisjon 4.2.1 D;x = Mg(y: yêU & (Ez)(m(z,x,y)))

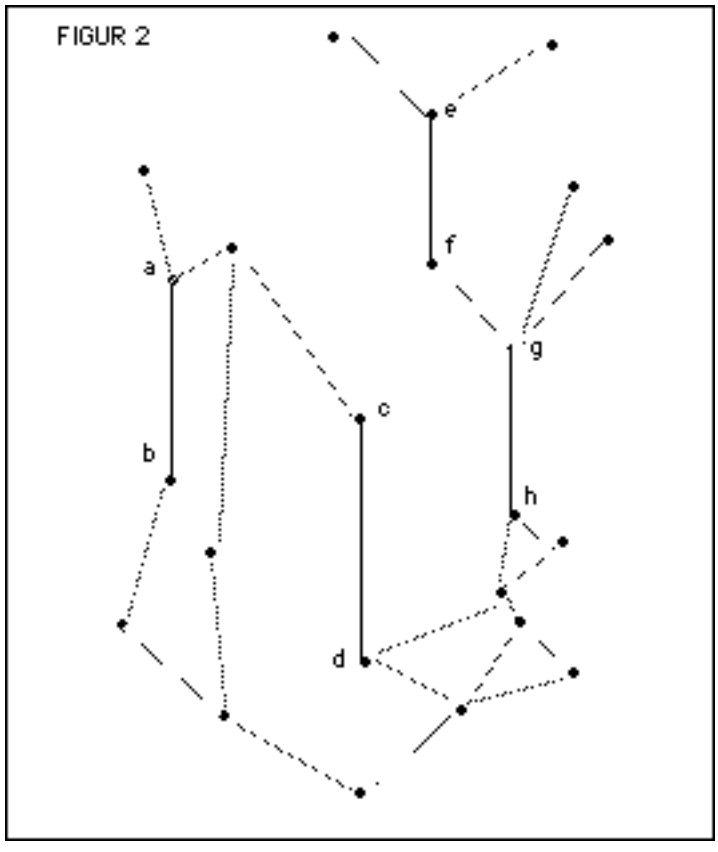
Saken er nå at man kan besvare spørsmålet ovenfor bekreftende om man i tillegg til å anta at aksiomene AV1 – AV19 også antar at de følgende to påstandene holder:

(+) (Ez)(Pv(z) & D;z≠ø & (Ax)(Ay)(x,yêD;zUMg(y: Neu(y) –>
(Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x))))

Dette innebærer som man ser at det finnes et utsagn x som beskriver noe som har positiv verdi i seg selv, videre at mengden alle de utsagn som er kvantitativt sammenlignbare med hensyn på dette utsagnet x er ikke-tom og endelig at dersom et utsagnspar er med i denne mengden utvidet med alle verdinøytrale utsagn så gjelder sammenlignbarhetsloven. Dessuten må man anta:

(++) (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)(m(z,x,y))

Dette innbærer at alle utsagn som beskriver forhold som enten har positiv eller negativ verdi i seg selv er kvantitativt sammenlignbare.



Anta nå at x er et utsagn og betrakt mengden av alle de par <y,z> der man har at m(z,y,x). I lys av aksiom AV19 (ii) ser man at denne mengden av par er en funksjon, og at domenet til funksjonen er klassen av alle de utsagn som er kvantitativt sett sammenlignbare med x, D;x. Denne funksjonen vil imidlertid ikke tilordne de verdinøytrale utsagnene i universet av utsagn noe reelt tall. Det synes imidlertid rimelig å kreve at de verdinøytrale utsagnene i U blir tilordnet tallet 0. Vi vil i så fall ha for oss en funksjon som tilordner alle elementene i D;xU Mg(y: Neu(y)) et element i Reell. Dette er motivet bak den følgende definisjon:

Definisjon 4.2.2 $\mu;x = Mg(<y,z>: m(z,y,x)) \cup Mg(<y,0>: Neu(y))$

Det vi nå etterhvert vil forsøke å vise er at hvis man definerer "VE(f)" ved å sette at VE(f) <–> (Ex)(xêU & f= μ;x) kan man utlede tesene (a) – (e) ovenfor, samt aksiomene VER 1 – VER 4 om man forutsetter (+) samt at det finnes noe som har positiv verdi, ie. (Ex)Pv(x).

Vi skal først studere den følgende sats:

Teorem 4.2.1 x,yêU & D;xΩ D;y ≠ø –> D;x= D;y

Denne satsen sier med andre ord at dersom mengden av de utsagn som er kvantitativt sammenlignbare med x har noen elementer felles med mengden av de utsagn som er kvantitativt sammenlignbare med y så faller de to mengdene sammen.

Bevis: Anta (1) x,yêU & zêD;xΩD;y. Fra definisjonen av "D;x" følger det da at det må finnes a,bêReell slik at (2) m(a,x,z) & m(b,y,z). La oss først vise kondijonalen mot høyre i konsekventen: Anta for vilkårlig u at uêD;x. Fra definisjonen av "D;x" følger i så fall at det finnes c der

(3) cêReell & m(c,x,u)

Vi må vise at det finnes noe d slik at dêReell & m(d,y,u). Fra (2) og AV19 (iii) følger (4) m(1/a,z,x). Fra dette, den andre konjunkten i (2) og AV19 (iv) har man m(b*(1/a),y,x). Fra dette, (3) og AV19 (iv) følger m(c*(b/a),y,u). Men siden c*(b/a)êreel har man da i lys av definisjonen av "D;x" at uêD;y. Siden u var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet uêD;x viser dette at inklusjonen mot høyre holder. La oss så se på inklusjonen mot venstre. Anta for vilkårlig u at uêD;y. Da finnes d der (5) dêReell & m(d,y,u). Fra (2) følger ved hjelp av AV19 (iii) og (iv) at m(a/b,x,y). Fra dette, (5) og AV19 (iv) har man så at m(d*(a/b),x,u). Herav følger så i lys av definisjonen av "D;x" at uêD;x. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Dernest ser vi på:

Teorem 4.2.2 Anta Pv(q) og anta at D;q≠ø. Anta videre at

(Ax)(Ay)(x,yêD;q U Mg(y:Neu(y)) –> Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x))

Da gjelder følgende:

(a) μ;q : D;q U Mg(y:Neu(y)) –> Reell
(b) x,yêD;q & Lv(x,y) –> μ;x= μ;y
(c) a,bêD;q &zêReell&z≠0 –>
(Ax)(xêD;qUMg(y:Neu(y)) –> μ;a(x) = z*μ;b(x)) <–> m(z,b,a)
(d) (Ax)(xêD;qUMg(y:Neu(y)) –> (μ;q(x) >0 <–> Pv(x)))
(e) (Ax)(xêD;qUMg(y:Neu(y)) –> (μ;q(x) <0 <–> Nv(x)))
(f) (Ax)(xêD;qUMg(y:Neu(y)) –> (μ;q(x) =0 <–> Neu(x)))
(g) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y:Neu(y)) –> (μ;q(x)>μ;q(y) <–> Sv(x,y)))
(h) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y:Neu(y)) –> (μ;q(x) = μ;q(y) <–> Lv(x,y)))

Bevis: (a) Anta forutsetningene i teoremet holder. Anta for vilkårlige x,y og z at <x,y>,<x,z>êμ;q for å vise at y=z. Fra definisjonen av μ;q fremgår det at vi må sondre mellom forskjellige tilfeller.

Tilfelle (i): <x,y>,<x,z>ê Mg(<x,z>: m(z,x,q)). Da har man m(y,x,q) & m(z,x,q). Fra dette og AV19 (ii) følger y=z.

Tilfelle (ii): <x,y>êMg(<x,z>: m(z,x,q)) & <x,z>êMg(<y,0>: Neu(y)). Det følger herav at m(y,x,q) & Neu(x) & y=0. Fra den første komponenten i denne konjunksjonen og AV19 (v) følger xêMg(u: Pv(u) v Nv(u)). Man kan derfor slutte at Pv(x) vNv(x). Har man Pv(x) følger Pv(x)&Neu(x). Dette sammen med AV12 og AV10 impliserer Sv(x,x) & xêU. Men dette strider mot AV3. Denne muligheten er derfor utelukket. Har man Nv(x) følger Nv(x)&Neu(x) og derfor i lys av AV13 og AV10 at Sv(x,x)&xêU som er utelukket av samme grunn. I begge tilfelle oppstår en motsigelse. Vi konkluderer med at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (iii): <x,y>êMg(<y,0>: Neu(y)) &<x,z>êMg(<x,z>: m(z,x,q)) . Dette tilfelle behandles på nøyaktig samme måte som det foregående.

Tilfelle (iv): <x,y>êMg(<y,0>: Neu(y)) & <x,z>êMg(<y,0>: Neu(y)). Da følger y= 0 = z som er det man ønsker.

Så langt har vi vist at μ;q er en funksjon om forutsetningene i teoremet holder. Anta nå at for vilkårlige y at (Ex)(<x,y>êμ;q). Da finnes x slik at <x,y>êμ;q. Fra definisjonen av μ;q kan man da slutte at vi enten har m(y,x,q) v y=0. I det siste tilfellet følger at yêReell. I det første tilfellet har man i lys av
AV19 (i) at yêReell. Dette viser at Rgn(μ;q) Inkl Reell. Vi må også vise at Dom(μ;q) = D;qUMg(y: Neu(y)). Anta først for vilkårlig x at xêDom(μ;q). Da følger det at det må finnes en z slik at <x,z>êμ;q. I lys av definisjonen av μ;q har man da at m(z,x,q) v

(Neu(x) &z=0). I det første tilfelle har man ved hjelp av definisjonen av D;q at xêD;q. I det andre tilfelle følger xêMg(y: Neu(y)). I begge tilfelle følger xê D;qUMg(y: Neu(y)). Antar vi på den annen side at
xêD;qUMg(y: Neu(y)) for vilkårlig x følger i det første tilfelle at det finnes z slik at m(z,x,q). Men da <x,z>êμ;q og derfor xêDom(μ;q). I det andre tilfellet har vi at <x,0>êMg(<y,0>: Neu(y)) Inkl μ;q. Det følger derfor også i dette tilfellet at xêDom(μ;q). Vi har nå vist at μ;q er en funksjon og i tillegg at:

Dom(μ;q) = D;qUMg(y: Neu(y)) & Rgn(μ;q) Inkl

Dette innebærer at vi har gitt et fullstendig bevis for punkt (a) i teoremet.

(b) Anta (1) x,yêD;q & Lv(x,y) for vilkårlige x,y. Vi ønsker å vise at μ;x = μ;y. Anta derfor for vilkårlige z,w at <z,w>êμ;x. Fra definisjonen av μ;x følger da at m(w,z,x) v (Neu(z) &w=0).

Tilfelle (i): m(w,z,x). Siden x,yêD;q følger at det finnes a;1, a;2 slik at (2) m(a;1,x,q) & m(a;2,y,q). Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av AV19 (iii) at m(1/a;2,q,y). Fra dette, AV19 (iv) og (2) kan man slutte at (3) m(a;1*(1/a;2),x,y). Men fra dette, det at Lv(x,y) og AV19 (xiv) følger a;1*(1/a;2) =1. Vi har derfor m(1,x,y). Siden m(w,z,x) følger ved hjelp av AV19 (iv) at m(w,z,y). Dette impliserer at <z,w>êμ;y.

Tilfelle (ii): Neu(z) &w=0. Da følger umidelbart fra definisjonen av μ;y at <z,w>êμ;y. I begge tilfelle har man at <z,w>êμ;y. Vi har derfor vist, siden <z,w> var vilkårlig element i μ;x at μ;x Inkl μ;y. Inklusjonen den andre veien vises på den samme måten. Dette viser at punkt (b) i teoremet holder.

(c) Anta (1) a,bêD;q &zêReell&z≠0. Anta videre at:

(2) (Ax)(xêD;qUMg(y:Neu(y)) –> μ;a(x) = z*μ;b(x)). Vi må vise at (2) holder hvis og bare hvis m(z,b,a). Vi viser først at (2) impliserer m(z,b,a). Siden aêD;q følger fra (2) at (3) μ;a(a) = z*μ;b(a). Siden a,bêD;q følger eksistensen av z1,z2 slik at (4) m(z1,a,q) & m(z2,b,q). Fra det første og AV19 (vii) følger m(1,a,a). Vi har derfor aêD;a Inkl Dom(μ;a). Det følger derfor at det finnes c1 slik at
(5) m(c1,a,a). Da må (6) c1=1 = μ;a(a) Fra (4) og AV19 følger videre at m(1/z2,q,b) og derfor, igjen i lys av (4) og AV19 at m(z1*(1/z2),a,b). Dette impliserer at aêD;b og derfor at aêDom(μ;b). Det følger det finns c2 slik at
(7) m(c2,a,b) & μ;b(a)=c2. Fra (3), (6) og (7) følger at c1 = z*c2. Dette impliserer siden c1=1 at c2= (1/z). Fra dette og (7) følger m(1/z,a,b). Herav kan vi ved hjelp av AV19 (iii) slutte at m(z,b,a). Dette er hva vi ønsker.

Anta nå på den annen side at (8) m(z,b,a) og (9) xêD;qUMg(y:Neu(y) for å vise at μ;a(x) = z*μ;b(x). Igjen må vis sondre mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): Neu(x). Da har vi i lys av definisjonene av μ;a og μ;b at at xêDom(μ;a) og xêDom(μ;b). Videre må vi ha at μ;a(x) = 0 = μ;b(x). Det følger i så fall at μ;a(x) = z*μ;b(x).

Tilfelle (ii): xêD;q. Da må det i følge definisjonen av D;q være slik at xêU. Videre må det finnes c1 slik at (10) m(c1,x,q). Nå har man også at a,bêD;q. Dette innebærer at det også må finnes c2 og c3 slik at (11) m(c2,a,q) & m(c3,b,q). Fra (10) og (11) og AV19 følger at (12) m(c1*(1/c2),x,a). Dette impliserer at xêD;a og derfor at (13) μ;a(x) = c1*(1/c2). Tilsvarende følger fra (11) og (10) ved hjelp av AV19 at xêD;b og at (14) μ;b(x) = c1*(1/c3). Fra (11) har vi enn mer ved hjelp av AV19 at (15) m(c2/c3, a,b). Dette, (8) og AV19 gir oss z= c3/c2. Sammen med (13) og (14) impliserer dette μ;a(x) = z*μ;b(x) som er det vi ønsker. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (c) i teoremet.

(d) Anta for vilkårlig x at (1) xêD;qUMg(y:Neu(y)). Anta først i tillegg at (2) μ;q(x)>0 med det for øye å bevise at Pv(x). Fra (1) følger at man enten har at xêD;q eller at

Neu(x). Men har man Neu(x) følger at xêDom(μ;q) & μ;q(x)=0. Dette strider mot at μ;q(x)>0. Man må derfor ha at xêD;q. Dette innebærer at det finnes noe c slik at (3) m(c,x,q). Nå har vi fra forutsetningene at (4) Pv(q). Det følger videre fra (2), (3) og definisjonen av μ;q at μ;q(x) =c >0. Fra dette, (3), (4) og AV19 (xii) følger Pv(x).

Anta nå at (1) holder og at (5) Pv(x). Da må vi åpenbart ha xêD;q og derfor at det finnes noe c slik (6) m(c,x,q). Siden Pv(q) følger i så fall ved hjelp av AV19 at c>0. Siden xêDom(μ;q) har vi i lys av definisjonen av μ;q at c=μ;q(x)>0. Dette viser at punkt (d) holder.

(e) Anta for vilkårlig x at (1) xêD;qUMg(y:Neu(y)). Anta først at (2) μ;q(x)<0 med det for øye å bevise at Nv(x). Fra (1) følger at man enten har at xêD;q eller at Neu(x). Men har man Neu(x) følger at xêDom(μ;q) & μ;q(x)=0. Dette strider mot at μ;q(x)<0. Man må derfor ha at xêD;q. Dette innebærer at det finnes noe c slik at (3) m(c,x,q). Nå har vi fra forutsetningene at (4) Pv(q). Det følger videre fra (2), (3) og definisjonen av μ;q at μ;q(x) =c <0. Fra dette, (3), (4) og AV19 (xii) følger ¬Pv(x). Men siden x åpenbart er med i U og vi også har at ¬Neu(x), følger ved hjelp av AV11 at Nv(x).

Anta nå at (1) holder og at (5) Nv(x). Da må vi åpenbart ha xêD;q og derfor at det finnes noe c slik (6) m(c,x,q). Vi har da i lys av AV19 at m(1/c,q,x). Siden Pv(q) ifølge forutsetningene i teoremet følger at (1/c)<0. Dette impliserer at c<0. Men har man m(c,x,q) følger at μ;q(x)=c. Man kan derfor trekke den slutning at μ;q(x)<0. Dette viser at punkt (e) holder.

(f) Anta for vilkårlig x at (1) xêD;qUMg(y:Neu(y)). Anta i første omgang at μ;q(x)=0. Hadde vi da xêD;q ville det finnes et eller annet reelt tall c slik at m(c,x,q). Fra dette og AV19 følger i så fall μ;q(x)≠0. Men dette er umulig. Det følger at xêMg(y: Neu(y)) og derfor at Neu(x). Har vi på den annen side at Neu(x) følger det at <x,0>êμ;q fra definisjonen av μ;q. Men siden μ;q er en funksjon har vi da μ;q(x) = 0. Dette viser at punkt (f) holder.

(g) Anta for vilkårlige x,y at (1) x,yêD;qUMg(y:Neu(y)). Anta videre at (2) μ;q(x)>μ;q(y) med det for øye å vise at Sv(x,y). Fra definisjonen av D;q og AV19 fremgår det at man må ha (3) D;qΩ Mg(y: Neu(y)) = ø. I lys av (1) er det naturlig å sondre mellom fire tilfelle:

Tilfelle (i): xêD;q & Neu(y). I dette tilfelle må vi ha at det finnes c slik at (4) m(c,x,q). I lys av definisjonen av μ;q har vi da μ;q(x)=c og μ;q(y)=0. Fra dette og (2) følger c>0. Fra (4) og AV19 (v) følger Pv(x) v Nv(x). Har man Pv(x) følger Sv(x,y) umiddelbart i lys av A13. Anta Nv(x). Siden det forutsettes at Pv(q) følger ved hjelp av (4), det at c>0 og AV19 (xii) at Pv(x). I lys av AV3, AV10 og AV15 følger da at ¬Nv(x). Dette gir oss en motsigelse og dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): x,yêD;q. I så fall finnes c1,c2 slik at (5) m(c1,x,q) & m(c2,y,q). Da har vi åpenbart i lys av (2) og definisjonen av μ;q at c1>c2. Siden (5) holder har vi i lys av AV19 (v) at x,yêMg(z: Pv(z) v Nv(z)). Det følger at vi må studere fire undertilfelle:

Undertilfelle (iia): Pv(x) &Pv(y). Fra (5) og AV19 følger at m(c1/c2,x,y). Siden c1,c2≠0 har vi c1/c2>1. Dette og AV19 (xv) impliserer Sv(x,y) som er det vi ønsker.

Undertilfelle (iib) Pv(x) & Nv(y). Da har vi direkte fra AV15 at Sv(x,y).

Undertilfelle (iic) Nv(x) & Pv(y). Fra (5) følger da siden Pv(q) ved hjelp av AV19 (ix) at c2>0. Fra (5) følger at m(1/c1,q,x). Fra dette og AV19 følger siden Pv(q) & Nv(x) at 1/c1<0. Men dette impliserer at c1<0. Det følger at c1<c2. Dette strider mot at c1>c2. Dette tilfellet er derfor utelukket.

Undertilfelle (iid) Nv(x) & Nv(y). Fra (5) følger ved hjelp av AV19 at man må ha m(c1/c2,x,y). Anta mot formodning at ¬Sv(x,y). I lys av forutsetningene i satsen har vi da at Lv(x,y) v Sv(y,x). Anta Lv(x,y). I lys av m(c1/c2,x,y) følger da ved hjelp av AV19 (xiv) at

c1/c2=1. Men dette innebærer at c1=c2, noe som strider mot at c1>c2. Eller så må man ha Sv(y,x). Siden vi har m(c2/c1,y,x) & Nv(x) & Nv(y) følger i så fall ved hjelp av AV19 (xvi) at c2/c1<1. Siden Nv(x) &Pv(q) &m(c1,x,q) følger at c1<0. Tilsvarende har vi fra det at Nv(y)&Pv(q) & m(c2,y,q) at c2<0. Fra dette og det at c2/c1 <1 kan man slutte at c2>c1. Men dette er umulig siden c1>c2. Det følger at Sv(x,y). Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Tilfelle (iii): xêMg(y:Neu(y)) & yêD;q. I så fall har vi i lys av definisjonen av μ;q at μ;q(x)=0. Videre må man ha at det finnes c slik at m(c,y,q). Da μ;q(y)=c. Siden Pv(q) &c<0 kan man ikke ha Pv(y) for i så fall ville man ha hatt c>0 i lys av AV19 (ix). Siden vi heller ikke kan ha Neu(y) følger det at Nv(y). Men da Neu(x)& Nv(y). Dette og AV14 gir Sv(x,y) som er det vi ønsker.

Tilfelle (iv): Neu(x) & Neu(y). Det følger da umiddelbart ved hjelp av definisjonen av μ;q at μ;q(x) =0 = μ;q(y). Men dette strider mot antagelsen om at μ;q(x) >μ;q(y). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Vi har nå gjennomført beviset for kondisjonalen mot høyre i (g). La oss dernest ta for oss kondisjonalen mot venstre. Anta derfor

(6) x,yêD;qUMg(y:Neu(y)) og (7) Sv(x,y). Igjen må vi sondre mellom en rekke tilfelle:

Tilfelle (i): x,yêD;q. Da finnes c1, c2 slik at (8) m(c1,x,q) & m(c2,y,q). I lys av definisjonen av μ;q maå vi da ha (9) μ;q(x)= c1 & μ;q(y) =c2. Det følger også fra (8) og AV19 at x,yêMg(z: Pv(z) & Nv(z)). Det er derfor nødvendig å sondre mellom fire undertilfelle:

Undertilfelle (ia): Pv(x) & Pv(y). Siden Pv(q) har man da i lys av (8) og AV19 at c1,c2>0. Vi har videre fra (8) og AV19 at m(c1/c2,x,y). Siden Pv(x)& Pv(y) følger da ved hjelp av AV19 (xv), siden Sv(x,y), at c1/c2>1. Dette impliserer c1>c2 og derfor μ;q(x)>μ;q(y).

Undertilfelle (ib): Pv(x) & Nv(y). Fra dette, (8), det at m(c1,x,q) og det at Pv(q) følger at c1>0. Tilsvarende har vi fra det at Nv(y), Pv(q), m(c2,y,q) og AV19 (viii) at c2<0. Dette impliserer c1>c2 og derfor μ;q(x)>μ;q(y).

Undertilfelle (ic): Nv(x) & Pv(y). Fra dette og AV15 følger Sv(y,x) som åpenbart strider mot antagelsen om at Sv(x,y), siden Sv er en asymmetrisk relasjon. Dette tilfellet er derfor utelukket.

Undertilfelle (id): Nv(x) & Nv(y). Siden Pv(q) har vi da i lys av (8) og AV19 at m(1/c1,q,x) & m(1/c2,q,y). Dette og AV19 (viii) impliserer at 1/c1<0 og 1/c2 <0. Vi har derfor c1,c2 <0. Vi har også fra (8) i kraft av AV19 at m(c1/c2,x,y). Siden Nv(x) og Nv(y) kan man derfor benytte AV19 (xvi) og slutte at c1/c2<1. Men fra dette og det at c1,c2<0 følger c1>c2. Det følger at μ;q(x)>μ;q(y).

Tilfelle (ii): xêD;q & Neu(y). Fra det første følger at det finnes c1 slik at m(c1,x,q). Fra det andre følger at μ;q(y)=0. Man må i dette tilfellet ha at Pv(x) v Nv(x). Er det slik at Nv(x) har man i lys av AV14 at Sv(y,x) som strider mot at vi forutsetter Sv(x,y). Det følger at Pv(x). Fra dette, det at m(c1,x,q) samt det at Pv(q) følger at c1>0 i lys av AV19 (ix). I lys av definisjonen av μ;q impliserer dette μ;q(x)> μ;q(y) som er det vi ønsker.

Tilfelle (iii): Neu(x) & yêD;q I dette tilfelle følger det at det finnes c2 som er slik at m(c2,y,q). Videre må man ha Pv(y) v Nv(y). I det første tilfelle følger Sv(y,x) som strider mot forutsetningen om at Sv(x,y). Man må derfor ha Nv(y). Siden m(c2,y,q) følgerm(1/c2,q,y). Fra dette AV19, det at Pv(q) & Nv(y) følger at c2<0. Men fra definisjonen av μ;q følger da μ;q(x)=0>c2= μ;q(y) som er det vi ønsker.

Tilfelle (iv): Neu(x) & Neu(y). I dette tilfelle har vi i lys av AV18 at Lv(x,y). Det

følger da ved hjelp av AV8 og AV3 at ¬Sv(x,y). Dette tilfellet er derfor utelukket siden det strider mot forutsetningen om at Sv(x,y).

Dette viser at kondisjonalen mot venstre i punkt (g) holder og avslutter dermed vårt bevis for dette punktet i teoremet.

(h) Anta for vilkårlige x,y at x,yêD;qUMg(y:Neu(y)). Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta derfor μ;q(x) = μ;q(y). Vi må igjen sondre mellom forskjellige tilfelle:

Tilfelle (i): x,yêD;q. Da finnes c1,c2 slik at (1) m(c1,x,q) & m(c2,y,q). Det følger at μ;q(x)=c1 & μ;q(y)=c2. Siden μ;q(x) = μ;q(y) kan man slutte c1=c2. Fra (1) følger ved hjelp av AV19 at m(c1/c2,x,y). Siden c1=c2≠0 følger m(1,x,y). Fra dette og AV19 (xiv) følger Lv(x,y) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): xêD;q & Neu(y). I dette tilfellet har man i lys av definisjonen av μ;q at μ;q(y) =0. Siden xêD;q følger ved hjelp av AV19 at det finnes c1 slik at m(c1,x,q) der c1≠0. Fra definisjonen av μ;q følger at μ;q(x)=c1≠0. Men da μ;q(x)≠μ;q(y). Dette strider imidlertid mot vår antagelse om det motsatte. Det følger at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (iii): Neu(x) & yêD;q. I dette tilfellet har man i lys av definisjonen av μ;q at μ;q(x) =0. Siden yêD;q følger ved hjelp av AV19 at det finnes c1 slik at m(c1,y,q) der c1≠0. Fra definisjonen av μ;q følger at μ;q(y)=c1≠0. Men da μ;q(x)≠μ;q(y). Dette strider imidlertid mot vår antagelse om det motsatte. Det følger at også dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (iv): Neu(x) & Neu(y). Da har vi umiddelbart ved hjelp av AV18 at Lv(x,y).

Vi har nå vist kondisjonalen mot høyre i konsekventen i (h) gitt x,yêD;qUMg(y:Neu(y)). La oss vise at kondisjonalen mot venstre i konsekventen i (h) holder gitt x,yêD;qUMg(y:Neu(y)) for vilkårlige x,y. Anta derfor Lv(x,y). Igjen finner vi det nødvendig å sondre mellom en rekke tilfelle:

Tilfelle (i): x,yêD;q. I dette tilfellet finnes c1, c2 slik at m(c1,x,q) & m(c2,y,q). Fra dette følger ved hjelp av AV19 at m(c1/c2,x,y). Siden Lv(x,y) følger da ved hjelp av AV19 (xiv) at c1/c2=1. Dette innebærer at c1=c2. Fra dette følger i lys av at m(c1,x,q) & m(c2,y,q) og definisjonen av μ;q at μ;q(x) = μ;q(y).

Tilfelle (ii): xêD;q & Neu(y). I dette tilfelle har man at det må finnes c slik at m(c,x,q). Fra dette og AV19 kan man slutte at Pv(x) v Nv(x). Men i begge disse tilfellene følger ¬Lv(x,y) om Neu(y). Dette strider mot forutsetningen om at Lv(x,y). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (iii): yêD;q & Neu(x). I dette tilfelle har man at det må finnes c slik at m(c,y,q). Fra dette og AV19 kan man slutte at Pv(y) v Nv(y). Men i begge disse tilfellene følger ¬Lv(x,y) om Neu(x). Dette strider mot forutsetningen om at Lv(x,y). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (iv): Neu(x) & Neu(y). I dette tilfelle følger direkte at μ;q(x)=μ;q(y) i lys av definisjonen av μ;q.

Vi har nå vist at punkt (h) i teoremet holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for denne satsen. **Q.E.D.**

Vi kan nå fullføre den oppgaven som vi satte oss ovenfor. La teorien KET1* være den man får når man fjerner aksiomene VER 1 – VER 4 fra KET 1 og fjerner predikatet "VE(x)" fra det ikke-logiske vokabularet og i stedet gjør følgende: Utvider det ikke-logiske vokabularet med predikatene (i) – (vi) ovenfor og føyer til AV1 – AV19 som nye ikke-logiske aksiomer. Det bør noteres at den er svakere enn KET1. I denne teorien kan man vise at følgende holder:

Teorem 4.2.3: Anta at følgende holder:

(i) Pv(q) & D;q≠ø.

(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y: Neu(y) –> (Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x)))
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)m(z,x,y))

Anta videre at "VE(f)" er definert ved:

VE(f) <–> (Ex)(Pv(x) & xêU & f = μ;x)

Da gjelder:

(a) VE(f) –> (Ec)(cêReell & c>0 & f = Mg(<x, c*μ;q(x)>: xêU))
(b) (Ef) VE(f)
(c) Dom(μ;q) = U
(d) VE(f) –>. Func(f) & Dom(f) = U & Rgn(f) Inkl Reell
(e) VE(f) & VE(g) –> (Ec)(cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)))

Bevis: Ad (a). Anta (1) VE(f). Fra definisjonen av "VE" følger da eksistensen av x der man har: (2) xêU & Pv(x) & f=μ;x. Siden vi fra (i) i forutsetningen har Pv(q) følger fra (2) og punkt (iii) i forutsetningen at det finnes c slik at
(3) m(c,q,x). Fra dette og punkt (i) i AV19 følger (4) cêReell.

Anta for vilkårlig <y,w> at <y,w>êf. Da har man i lys av (2) <y,w>êμ;x. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Pv(y) v Nv(y). Da følger i lys av AV12 at ¬Neu(y). Fra dette og definisjonen av μ;x følger (5) m(w,y,x). Fra (3) har man ved hjelp av AV19, punkt (iii), at (6) m(1/c,x,q). Fra dette og (5) følger igjen ved hjelp av AV19 at m((w*(1/c)),y,q). Herav har man ved hjelp av definisjonen av μ;q, og det faktum at μ;q er en funksjon i lys av forutsetningene (Jmf. Teorem 4.2.2),
μ;q(y) = w*(1/c). Det følger at w= c*μ;q(y). Siden Pv(y) vNv(y) følger det at yêU. Vi har derfor w= c*μ;q(y) & yêU. Herav følger <y,w> = <y, c*μ;q(y)> & yêU og derfor at (Ex) (<y,w> = <x, c*μ;q(x)> & xêU). Da har man

<y,w>ê Mg(<x,c*μ;q(x): xêU).

Tilfelle (ii): Neu(y). Da har man siden <y,w>êμ;x i lys av definisjonen av μ;x at w=0. Men <y,0>êμ;q, og siden μ;q ilys av Teorem 4.2.2 er en funksjon har man μ;q(y) = 0. Det følger derfor også i dette tilfelle at w = 0 = c*0 = c*μ;q(y). Fra dette kan man så slutte på samme måte som i det foregående tilfellet at

<y,w>ê Mg(<x,c*μ;q(x): xêU).

<y,w> var et vilkårlig element i f. Vi har derfor vist

(7) f Inkl Mg(<x,c*μ;q(x): xêU)

Det er nødvendig å gi bevis for inklusjonen den andre veien i (7). Anta derfor for vilkårlig <y,w> at (8) <y,w>êMg(<x,c*μ;q(x): xêU). Da følger det at det må finnes x slik at (9) <y,w> = <x, c*μ;q(x)> & xêU Herav har man w = c*μ;q(y) og at yêU. Nå har man ved hjelp av Teorem 4.2.2 og forutsetningene i satsen at Func(μ;q). Sett r= μ;q(y). Det følger da at <y,r>êμ;q. Det er nå to muligheter:

Tilfelle (i): Neu(y). Da har man i lys av definisjonen av μ;q at r=0. Men da har man åpenbart at <y,r>=<y,0>êμ;x=f.

Tilfelle (ii): Pv(y) v Nv(y). Da følger ved hjelp av definisjonen av μ at m(r,y,q) Fra dette, (3) og AV19, punkt (iv), følger m(c*r,y,x). Da har man
<y,c*r> = <y, c*μ;q(y)> = <y,w>êμ;x = f.

Vi har nå vist (8) Mg(<x,c*μ;q(x): xêU) Inkl f. Dette gir en et fullstendig bevis for punkt (a) i teoremet.

Ad (b). Fra forutsetningene i satsen følger umiddelbart:

(1) Pv(q) &qêU & μ;q=μ;q.

Nå har man at (2) μ;q Inkl UXReell. På basis av det forhold at U eksisterer og de

mengdeteoretiske aksiomene i teorien er det lett å vise at mengden UXReell finnes. Siden (2) holder har ma derfor ved hjelp av utsondringsaksiomet at μ;q eksisterer. Fra (1) følger derfor (Ex)(Pv(x) & xêU & μ;q = μ;x). Fra dette og definisjonen av "VE" følger VE(μ;q). Herav (Ef)VE(f).

Ad (c). Fra Teorem 4.2.2 og forutsetningene i satsen fremgår det at man har Dom(μ;q) = D;q U Mg(y: Neu(y)). Det vil være nok å vise, i lys av AV 10 – AV12 at D;q = Mg(u: Pv(u) v Nv(u)). Anta zêD;q. Da har man per definisjon at zêU & (Ec)m(c,q,z). Fra dette og AV 19, punkt (v), følger zêMg(u: Pv(u) v Nv(u)). Anta på den annen side at zêMg(u: Pv(u) v Nv(u)). Siden Pv(q) følger da z,qêMg(u: Pv(u) v Nv(u)). Fra dette og den tredje forutsetningen i satsen følger m(c,q,z). Siden z åpenbart må være med i U følger herav ved hjelp av definisjonen av D;q at zêD;q. Dette gir en et fullstendig bevis for påstand (c).

Ad (d). Fra forutsetningene i satsen og Teorem 4.2.2 har man at μ;q er en funksjon. I lys av det samme teorem og det som ble vist under punkt (c) har man enn mer at Dom(μ;q) = U og Rgn(μ;q) Inkl Reell. Fra punkt (a) følger det at det finnes c der c>0 & cêReell & f = Mg(<x, c*μ;q(x)>: xêU) om VE(f). Det er da lett å se at man må ha Func(f) & Dom(f) = U & Rgn(f) Inkl Reell.

Ad (e). Anta (1) VE(f) & VE(g). Fra dette og definisjonen av "VE" gitt i forutsetningene til teoremet følger at det finnes x1, x2 der vi har:

(2.1) x1êU & Pv(x1) & f = μ;x1

(2.2) x2êU & Pv(x2) & f = μ;x2

Fra dette og den tredje forutsetningen i satsen følger at det finnes c slik at
(3) m(c, x2,x1). Fra dette og AV 19, punkt (ix) følger i lys av (2.1) og (2.2) at
(4) c>0. Anta nå for vilkårlig y at yêU. Vi ønsker å vise:

(5) μ;x1(y) = c*μ;x2(y)

Dette vil være tilstrekkelig. Vi skiller mellom to hovedtilfeller:

Tilfelle (i): yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)). Det er da igjen åpenbart to muligheter: (a) Pv(y). Da har man Pv(x1) & Pv(y). Fra dette og den tredje forutsetningen følger (6) m(d;1,y,x1) for noe d;1. I lys av AV 19, punkt (ix), har man da at (7) d;1>0. Tilsvarende har man at det må finnes et reelt tall d;2 der
(8) d;2>0 & m(d;2,y,x2). I lys av definisjonen av μ følger (9) μ;x1(y)=d;1 og
(10) μ;x2(y) = d;2. Videre har man fra (6), (8) samt AV19, punkt (iii) og (iv), at m(1/d;2,x2,y) og derfor (11) m(d;1*(1/d;2),x2,x1). Fra dette, (3) og AV19, punkt (ii), følger c = (d;1/d;2) og derfor d;1 = c*d;2. Men fra dette har man

f(y) = y,x1(y) = d;1 = c*d;2 = c*μ;x2(y) = c* g(y).

Satsen holder derfor i dette tilfellet. (b) Nv(y). Da har man (12) Pv(x1) & Nv(y). Fra den tredje forutsetningen i teoremet følger da at det finnes d;1 der man har: (13) m(d;1,y,x;1). Fra dette, (12) og AV 19, punkt (viii), har man (14) d;1<0. Likeledes har man siden Pv(x2) at det finnes d;2 slik at (15) m(d;2,y,x;2) og der (16) d;2<0. Fra (13) og (15) følger så ved hjelp av AV19 at m(d;1/d;2,x2,x1). Dette og (3) impliserer så i lys av AV19, punkt (ii), at c = d;1/d;2. Nå har man i lys av definisjonen av μ at μ;x1(y) =d;1 og μ;x2(y) = d;2. Det følger at

f(y) = y,x1(y) = d;1 = c*d;2 = c*μ;x2(y) = c* g(y) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): Neu(y). Da har man ved hjelp av AV19, punkt (v) at ¬(Ez)m(z,y,x1) & ¬ (Ez)m(z,y,x2). Ved hjelp av definisjonen av μ har man da y;x1(y) = 0 = c*0 = c*μ;x2(y). Dette viser at påstanden også holder i dette tilfellet. Dette

viser at punkt (e) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.2.4: Anta at følgende holder:

(i) Pv(q) & D;q≠ø.

(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y: Neu(y) –> (Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x)))

(iii) (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)m(z,x,y))

Anta videre at "VE(f)" er definert ved:

VE(f) <–> (Ex)(Pv(x) & xêU & f = μ;x)

Da gjelder:

(a) Pv(x) <–> xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>0)

(b) Nv(x) <–> xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)<0)

(c) Neu(x) <–> xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)=0)

(d) Sv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>f(y))

(e) Lv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE(f) & f(x) = f(y))

(f) m(z,x,y) <–> [zêReell & x,yêU & (Af)(VE(f) –> z = (f(x)/f(y))) &
(Af)(VE(f) –> (f(x) ≠ 0 & f(y) ≠ 0))]

Bevis: Bevisene for punkt (a) – (c) er helt analoge. Vi behandler derfor bare punkt (a).

Ad (a): Anta først at (1) Pv(x). Da følger umiddelbart (2) xêU. Fra forutsetningene og Teorem 4.2.3 følger (3) VE(μ;q) & Dom(μ;q) =U. Ved hjelp av Teorem 4.2.2 har man da:

(Ax)(xêDom(μ;q) –> (μ;q(x)>0 <–> Pv(x))

Fra dette og (1) – (3) følger imidlertid μ;q(x)>0. Vi har derfor VE(μ;q) & μ;q(x)>0. Dette impliserer sammen med (2): xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>0) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>0). Da finnes det f slik at (4) xêU & VE(f) & f(x)>0. Fra forutsetningene i satsen og foregående teorem følger da at det finnes c der (5) cêReell & c>0 & f = Mg(<x, c*μ;q(x)>: xêU). Fra dette kan man slutte at f(x) = c*μ;q(x) og derfor i lys av (4): c*μ;q(x)>0. Herav μ;q(x)>0. Fra forutsetningene har man også ved hjelp av Teorem 4.2.3: Dom(μ;q) =U. Man har derfor ved hjelp av Teorem 4.2.2:

(Ax)(xêDom(μ;q) –> (μ;q(x)>0 <–> Pv(x)) Siden xêU &μ;q(x)>0 følger Pv(x) som er det vi ønsker.

Ad (d): Anta at (1) Sv(x,y). Da følger umiddelbart (2) x,yêU. Fra forutsetningene og Teorem 4.2.3 følger (3) VE(μ;q) & Dom(μ;q) =U. Ved hjelp av Teorem 4.2.2 har man da:

(Ax)(xêDom(μ;q) –> (μ;q(x)>μ;q(y) <–> Sv(x,y))

Fra dette og (1) – (3) følger imidlertid μ;q(x)>μ;q(y). Vi har derfor VE(μ;q) & μ;q(x)>μ;q(y). Dette impliserer sammen med (2): x,yêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>f(y)) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side xêU & (Ef)(VE(f) & f(x)>f(y)). Da finnes det f slik at (4) x,yêU & VE(f) & f(x)>f(y). Fra forutsetningene i satsen og foregående teorem følger da at det finnes c der (5) cêReell & c>0 & f = Mg(<x, c*μ;q(x)>: xêU). Fra dette kan man slutte at (Ax)(xêU –> f(x) = c*μ;q(x)) og derfor i lys av (4): c*μ;q(x)>c*μ;q(y). Herav μ;q(x)>μ;q(y). Fra forutsetningene har man også ved hjelp av Teorem 4.2.3: Dom(μ;q) =U. Man har derfor ved hjelp av Teorem 4.2.2:

(Ax)(xêDom(μ;q) –> (μ;q(x)>μ;q(y) <–> Sv(x,y)) Siden x,yêU og μ;q(x)>μ;q(y) følger Sv(x,y) som er det vi ønsker.

Når det gjelder punkt (e) i satsen bevises dette på samme måte.

Ad (f): Anta (1) m(z,x,y). Fra Av19, punkt (i), følger da (2) zêReell & x,yêU. Anta for vilkårlig f at (3) VE(f). Ved hjelp av Teorem 4.2.3 følger da eksistensen av c der man har:

(4) cêReell & c>0 & f = Mg(<x,c*μ;q(x)>: xêU)

Fra (2) og (4) følger (5) f(x) = c*μ;q(x) og dessuten (6) f(y) = c*μ;q(y). Ved hjelp av Teorem 4.2.3 følger også (7) Dom(μ;q) = U. Videre har vi i lys av Teorem 4.2.2: (8) Dom(μ;q) = D;q UMg(y:Neu(y)). Fra (1) følger

(9) x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u))

Sett (10) r1 = f(x)/c & r2 = f(y)/c. Fra dette, (5) og (6) følger <y,r1>,<y,r2>êμ;q. Fra definisjonen av μ, (9) og AV19 følger fra dette m(r1,x,q) & m(r2,x,q). Herav: m(r1,x,q) & m(1/r2,q,y). Fra dette har man ved hjelp av AV19 at m(r1/r2,x,y). Fra dette og (1) følger z=r1/r2. Vi har i lys av (9) og definisjonen av μ;q at μ;q(x)≠0 & μ;q(y)≠0. Fra dette, (5) og (6) følger f(x)≠0 & f(y)≠0. Dette, (10) og det forhold at z=r1/r2 gir en z= f(x)/f(y). Dermed har vi gitt bevis for den ene halvdelen av punkt (f).

La oss også gi bevis for den andre halvdelen av dette punktet: Anta

(11) zêReell & x,yêU & (Af)(VE(f) –> z = (f(x)/f(y))) &
(Af)(VE(f) –> (f(x) ≠ 0 & f(y) ≠ 0))

Fra forutsetningen i teoremet følger Pv(q) & qêU & μ;q=μ;q. Man har derfor (12) VE(μ;q). Fra dette og (11) følger

(13) z = μ;q(x)/μ;q(y) & μ;q(x)≠0 & μ;q(y)≠0.

Fra forutsetningen i teoremet og Teorem 4.2.3 følger Dom(μ;q)=u. Sett (14) r1= μ;q(x) & r2 = μ;q(y). Da følger <x,r1>êμ;q & <y,r2>êμ;q & r1≠0 & r2≠0. Fra dette, definisjonen av μ;q og AV19 m(r1,x,q) & m(r2,y,q). Da m(1/r2,q,y) og derfor (ved hjelp av AV19) at m(r1/r2,x,y). Fra dette, (13) og (14) har man imidlertid m(z,x,y). Dermed har vi vist at (f) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 4.2.5: Anta at følgende holder:

(i) Pv(q) & D;q≠ø.
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y: Neu(y) –> (Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x)))
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)m(z,x,y))

Anta videre at "VE(f)" og "VE*(f)" er definert ved:

VE(f) <–> (Ex)(Pv(x) & xêU & f = μ;x)
VE*(g) <–> (Ef)(VE(f) & (Ec)(cêReell & c>0 &
g = Mg(<x,c*f(x)>: xêU)))

Da gjelder:

(a) VE*(g) –> (Func(g) & Dom(g) = U & Rgn(g) Inkl Reell)
(b) VE*(f) & VE*(g). –> (Ec)(cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)))
(c) (Ef)VE*(f)
(d) VE*(f) & cêReell &c>0 & g= Mg(<x,c*f(x)>:xêU). –> VE*(g)
(e) x,yêU –>
(Ef)(VE*(f) & f(x)>0) <–> (Ef)(VE(f) & f(x)>0)
(Ef)(VE*(f) & f(x)<0) <–> (Ef)(VE(f) & f(x)<0)
(Ef)(VE*(f) & f(x) = 0) <–> (Ef)(VE(f) & f(x) = 0)
(Ef)(VE*(f) & f(x)>f(y)) <–> (Ef)(VE(f) & f(x)> f(y))
(Ef)(VE*(f) & f(x) = f(y)) <–> (Ef)(VE(f) & f(x) = f(y))
(f) zêReell & x,yêU –>

(Af)(VE*(f) –> z=(f(x)/f(y))) <–> (Af)(VE(f) –> z=(f(x)/f(y)))
(Af)(VE*(f) –>. f(x)≠0 &f(y)≠0) <–>
(Af)(VE(f) –>. f(x)≠0 &f(y)≠0)

Bevis: Ad (a): Anta VE*(g). Fra definisjonen av VE* følger da
(1) VE(f) & (Ec)(cêReell & c>0 & g = Mg(<x,c*f(x)>: xêU)
Fra VE(f) og Teorem 4.2.3 følger:
(2) Func(f) & Dom(f) = U & Rgn(f) Inkl Reell
På grunnlag av (1) og (2) skulle det være klart at g er en funksjon der domenet er U og verdiområdet inkludert i Reell.

Ad (b): Anta (1) VE*(f) & VE*(g). Fra dette og forutsetningene i teoremet følger eksistensen av f;1,f;2 og c1,c2 slik at:
(2.1) VE(f;1) & c1êReell & c1>0 & f = Mg(<x,c1*f;1(x)>: xêU)
(2.2) VE(f;2) & c2êReell & c2>0 & g = Mg(<x,c2*f;2(x)>: xêU)
Fra det at VE(f;1) &VE(f;2) følger ved hjelp av Teorem 4.2.3 at det finnes d der:
(3) dêReell & d>0 & (Ax)(xêU –> f;1(x) = d*f;2(x))
Anta xêU for vilkårlig x. Ved hjelp av (2.1), (2.2) og (3) har man da:
(4) f(x) = c1*f;1(x) & g(x) = c2*f;2(x)
(5) (c1/c2)*d >0
(6) f;1(x) =d*f;2(x).
Fra (4) og (6) følger: (7) f(x) = c1*f;1(x) = c1*d*f;2(x)
= c1*d*(1/c2)*g(x)
= (c1/c2)*d*g(x)
Vi har derfor (Ax)(xêU –> f(x) = (c1/c2)*d*g(x)). Fra dette og (5) følger påstanden.

Ad (c): Fra forutsetningene i satsen og Teorem 4.2.3 følger at det finnes f slik at VE(f). Vi har om man setter c=1 at cêReell & c>0 & f= Mg(<x,c*f(x)>: xêU). Fra dette og definisjonen av VE* følger VE*(f). Herav (Ef)VE*(f).

Ad (d): Anta (1) VE*(f) & cêReell &c>0 & g= Mg(<x,c*f(x)>:xêU). Fra VE*(f) følger per definisjon eksistensen av h og d slik at
(2) VE(h) & dêReell & d>0 & f = Mg(<x,c*h(x)>: xêU)
Fra (1) og (2) følger g = Mg(<x, c*d*h(x)>: xêU). Setter man q=c*d har man qêReell & q>0 og derfor:
(Eh)(VE(h) & (Eq)(qêReell & q>0 & g = Mg(<x,q*h(x)>: xêU))). Fra dette følger VE*(g) i lys av definisjonen av VE*.

Ad (e) Det er lett å se at man har (1) (Af)(VE(f) –> VE*(f)). For anta VE(f) for vilkårlig (f). Setter man da c=1følger det at
cêReell & c>0 & f= Mg(<x,c*f(x)>: xêU).
Fra dette og definisjonen av VE* følger VE*(f). Anta x,yêU. Fra dette og (1) følger:
(2) (Ef)(VE(f) & f(x)>0) <–> (Ef)(VE*(f) & f(x)>0)
(Ef)(VE(f) & f(x)<0) <–> (Ef)(VE*(f) & f(x)<0)
(Ef)(VE(f) & f(x) = 0) <–> (Ef)(VE*(f) & f(x) = 0)
(Ef)(VE(f) & f(x)>f(y)) <–> (Ef)(VE*(f) & f(x)> f(y))
(Ef)(VE(f) & f(x) = f(y)) <–> (Ef)(VE*(f) & f(x) = f(y))
Anta på den annen side at x,yêU og at det finnes f slik at (3) VE*(f) der man har
(4) f(x)>0 v f(x) = 0 v f(x)<0 v f(x) = f(y) v f(x) >f(y)

Fra (3) og definisjonen av VE* følger eksistensen av g og c slik at:

(5) VE(g) & cêReell & c>0 & f = Mg(<x,c*g(x)>: xêU)

Fra dette følger (6) VE(g) og (7) (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)). Fra (4), (6) og (7) kan man så slutte:

(Ef)(VE*(f) & f(x)>0) –> (Ef)(VE(f) & f(x)>0)
(Ef)(VE*(f) & f(x)<0) –> (Ef)(VE(f) & f(x)<0)
(Ef)(VE*(f) & f(x) = 0) –> (Ef)(VE(f) & f(x) = 0)
(Ef)(VE*(f) & f(x)>f(y)) –> (Ef)(VE(f) & f(x)> f(y))
(Ef)(VE*(f) & f(x) = f(y)) –> (Ef)(VE(f) & f(x) = f(y))

Dette viser at (e) holder.

Ad (f): Som i beviset for det forrige punktet kan man vise (Af)(VE(f) –> VE*(f)). Fra dette følger umiddelbart om x,yêU at:

(1) (Af)(VE*(f) –> z=(f(x)/f(y))) –> (Af)(VE(f) –> z=(f(x)/f(y))
(2) (Af)(VE*(f) –>. f(x)≠0 &f(y)≠0) –>
(Af)(VE(f) –>. f(x)≠0 &f(y)≠0)

Anta på den annen side at (3) (Af)(VE(f) –> z=(f(x)/f(y))) og at VE*(g) for vilkårlig g. Fra definisjonen av VE* følger da eksistensen av h og c slik at

(4) VE(h) & cêReell & c>0 & g = Mg(<x,c*h(x)>: xêU)

Herav følger i lys av (3) at z= (h(x)/h(y)) = c*h(x)/c*h(y) = g(x)/g(y) som er det vi ønsker. Dette viser at man har:

(Af)(VE(f) –> z=(f(x)/f(y))) –> (Af)(VE*(f) –> z=(f(x)/f(y))

Anta (Af)(VE(f) –>(f(x)≠0 & f(y)≠0)) og at VE*(g). Som ovenfor har man da at (4) holder. Det følger at g(x)= c*h(x)≠0, og at likeledes g(y) = c*h(y)≠0, siden h(x) og h(y) begge må være forskjellige fra null i dette tilfellet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Den følgende sats er et enkelt korollar til de to foregående teoremene.

Teorem 4.2.6: Anta at følgende holder:

(i) Pv(q) & D;q≠ø.
(ii) (Ax)(Ay)(x,yêD;qUMg(y: Neu(y) –> (Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x)))
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)m(z,x,y))

Anta videre at "VE(f)" og "VE*(f)" er definert ved:

VE(f) <–> (Ex)(Pv(x) & xêU & f = μ;x)
VE*(g) <–> (Ef)(VE(f) & (Ec)(cêReell & c>0 &
g = Mg(<x,c*f(x)>: xêU)))

Da gjelder:

(a) VE*(g) –> (Func(g) & Dom(g) = U & Rgn(g) Inkl Reell)
(b) VE*(f) & VE*(g). –> (Ec)(cêReell & c>0 & (Ax)(xêU –> f(x) = c*g(x)))
(c) (Ef)VE*(f)
(d) VE*(f) & cêReell &c>0 & g= Mg(<x,c*f(x)>:xêU). –> VE*(g)
(e) Pv(x) <–> xêU & (Ef)(VE*(f) & f(x)>0)
(f) Nv(x) <–> xêU & (Ef)(VE*(f) & f(x)<0)
(g) Neu(x) <–> xêU & (Ef)(VE*(f) & f(x)=0)
(h) Sv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE*(f) & f(x)>f(y))
(i) Lv(x,y) <–> x,yêU & (Ef)(VE*(f) & f(x) = f(y))
(j) m(z,x,y) <–> [zêReell & x,yêU & (Af)(VE*(f) –> z = (f(x)/f(y))) &
(Af)(VE*(f) –> (f(x) ≠ 0 & f(y) ≠ 0))]

Bevis: Satsen følger ved hjelp av Teorem 4.2.4 og 4.2.5. **Q.E.D.**

Vi har nå vist at i teorien KET1* kan man utlede aksiomene VER1 – VER4 og de definisjonene vi tidligere har gitt av predikatene "Pv(x)", "Nv(x)", "Neu(x)", "Sv(x,y)", "Lv(x,y)" og "m(z,x,y)" så sant man legger til følgende to formler som nye ikke-logiske aksiomer.

AV20 (Ez)(Pv(z) & D;z≠ø & (Ax)(Ay)(x,yêD;zUMg(y: Neu(y) –> (Sv(x,y) v Lv(x,y) v Sv(y,x))))

AV21 (Ax)(Ay)(x,yêMg(u: Pv(u) v Nv(u)) –> (Ez)(m(z,x,y))

Dette innebærer at teorien KET1* utvidet med AV20 og AV21 er deduktivt sett ekvivalent med teorien KET1.

§5 Noen flere verditeoretiske prinsipper

En lang rekke spørsmål kan stilles i forbindelse med særlig de verditeoretiske grunnbegrepene i teorien ovenfor. Det første, og forsåvidt et viktig spørsmål, er om de overhodet gir noen klar mening i det hele tatt. Det er ingen grunn til å ta for lett på dette spørsmålet. Vi skal imidlertid la det ligge foreløpig.

Man kan også stille spørsmål om det er mulig å formulere andre plausible verditeoretiske prinsipper innenfor den rammen vi her har satt opp enn dem vi allerede har nevnt. I denne forbindelse kan man i første omgang sette opp en liste over mulige prinsipper som ikke kan utledes i KET 1 og ta dem opp til kritisk drøfting. Her følger en liste over noen mulige prinsipper:

(a) x,yêU –> (Sv(x,y) –> Sv(Neg(y),Neg(x)))
(b) x,yêU –> (Sv(x,y) <–> Sv(K(x,Neg(y)), K(y,Neg(x)))
(c) x,yêU –> (Lv(x,y) <–> Lv(K(x,Neg(y)), K(y,Neg(x)))
(d) x,y,zêU –> (Sv(x,K(y,z)) –> Sv(x,y) & Sv(x,z))
(e) x,y,zêU –> (Sv(x,y) & Sv(x,z) –> Sv(x,K(y,z)))
(f) x,y,zêU –> (Sv(K(x,y),z) –> Sv(x,z) & Sv(y,z))
(g) x,y,zêU –> (Sv(x,z) & Sv(y,z)) –> Sv(K(x,y),z))[2]

§6 Om formen til mer spesielle verditeoretiske prinsipper.

Poenget med denne paragrafen er beskjedent. Det er bare å angi formen som en del mer spesielle påstander om verdier kan ha og vise hvordan disse kan uttrykkes innenfor den språkrammen som vi her arbeider med.

Vi minner om at dersom x er en unær egenskap så er ekstensjonsfunksjonen til x en funksjon som tilordner hver logisk mulig verden w en mengde med mulige individer. Vi betegner ekstensjonen til en egenskap x i verdenen w med "Ekst;w(x)". Er x en n-ær egenskap finnes det en mengde z slik at

[2] Disse prinsippene er hentet fra Halldéns bok "On the logic of 'Better' ". De fire siste formlene svarer i vår notasjon til formlene H1 – H4 på side 39 i hans bok.

Ekst;w(x) Inkl z^n for alle wêI.

Med en unær temporal egenskap skal vi i det følgende forstå en binær egenskap x som oppfyller det følgende krav:

(+) (Aw)(wêI –> (Ay)(Az)(<y,z>êEkst;w(x) –> zêT)

Her er T klassen av tidspunkter. Er E en unær temporal egenskap i denne forstand og har man at H(<x,t>,E,w) skal vi si at x har egenskapen E ved tidspunktet t.

La nå E være en unær temporal egenskap og t;1,t;2 to tidspunkter i T der vi forutsetter at t;1 < t;2. Da vil

s;-1(Mg(w: (At)(t;1≤t≤t;2 & têT –> <x,t>êEkst;w(E))))

være det utsagnet som sier at x ved alle tidspunkter i intervallet [t;1,t;2] har egenskapen E. Vi innfører "ut;<t;1,t;2>(E,x)" som forkortelse for dette uttrykket. Formelt gjøres dette ved den følgende definisjon:

D4.1 ut;<t;1,t;2>(E,x) = s;-1(Mg(w: (At)(t;1≤t≤t;2 & têT –> <x,t>êEkst;w(E))))

På tilsvarende vis kan man også operere med n-ære temporale egenskaper. Med en n-ær temporal egenskap E forstås en n+1-ær egenskap som oppfyller følgende krav:

(Aw)(wêI –> (Ax;1)...(Ax;n+1)(<x;1,...,x;n+1>êEkst;w(E) –> x;(n+1)êT))

Vi sier da at n-tuplet <x;1,...,x;n> har den n-ære temporale egenskap E ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis H(<x,1,...,x;n,t>,E,w).

Poenget nå er at en rekke påstander om verdi kan formuleres som er av typen:

(Ax)(At;1)(A;t;2)(t;1 <t;2 &t;1,t;2êT & F(x) –> Pos(ut;<t;1,t;2>(E,x)))

hvor F er en eller annen åpen setning i L som bare inneholder "x" som fri variabel. Setninger av denne typen sier, som man ser, at dersom t;1 og t;2 er tidspunkter der t;2 kommer etter t;1 og x er et eller annet objekt som oppfyller betingelsen F så er utsagnet ut;<t;1,t;2>(E,x), mao. utsagnet som sier at x har egenskapen E ved alle tidspunkter i intervallet [t;1,t;2] , et utsagn som beskriver noe som har positiv indre verdi. Man kan naturligvis tenke seg en lang rekke setninger av mer eller mindre beslektet natur. F. eks. setninger som sier at ut;<t;1,t;2>(E1,x) har større indre verdi en ut;<t;1,t;2>(E1,x) om t;1,t;2êT & t;1<t;2 og hvor E1 og E2 er to nærmere spesifiserte unære temporale egenskaper i den betydning som vi har nevnt ovenfor.

§7 Angående endel egenskaper som har positiv verdi i seg selv.

På mange måter kan det være av stor interesse å danne seg et mer omfattende, gjennomtenkt, allsidig og helhetlig bilde av de forhold som man mer eller mindre umiddelbart oppfatter som forhold har positiv verdi i seg selv. På helt tilsvarende vis kan det være viktig å forsøke å danne seg et mer helhetlig bilde av de ting som har negativ verdi i seg selv som er mer fintnervet og nyansert enn det man vanligvis blir presentert. Dette er forsåvidt en meget omfattende oppgave og det er umulig å gi noe annet enn en skisse av et mulig verdisyn her. Det bør understrekes at det som presenteres er momenter til et mulig verdisyn som i visse henseende virker sympatisk på forfatteren. Det synes imidlertid som om de intuisjoner man har om verdier på mange områder er svært svevende og ustabile. Dette gjelder særlig

spørsmål som har med sammenligning av verdier å gjøre og som f.eks. kan angå hvor mye større verdi noe har i seg selv i forhold til noe annet. De momenter som derfor etterhvert vil presenteres her er følgelig helt forsøksvise. Vi vil forsøke å presentere våre verdipåstander så eksplisitt som mulig innenfor den teoretiske rammen som har blitt trukket opp så langt. Dette har den fordel at det blir lettere å se hvilke påstander som er kontroversielle og hvilke som kan ha en mindre kontroversiell karakter. Det har også den fordel at det kan gjøre det letter å se hva som følger fra de enkelte verdipåstander isolert sett og i sammenheng med andre.

Blandt de ting om umiddelbart fremtrer som forhold med meget stor indre verdi er visse karakteregenskaper. Vi tenker på egenskaper som innlevelsesevne, evne til medfølelse, en sterk evne og vilje til å se virkeligheten fra andres synsvinkel uten derfor å gi karakterløst slipp på sitt eget virkelighetsbilde, videre det å være i besittelse av en stor grad av åpenhet ovenfor andre mennesker, videre slike egenskaper som vennlighet og evne til å inngi tillit. Alt dette synes å være egenskaper med positiv verdi. Det er nærliggende å se på dette som en familie av egenskaper som har med innlevelse og sympati å gjøre. Umiddelbart synes det som om noen av de viktigste og dypeste menneskelige verdier hører til denne familien. La oss på dette punkt nevne en rekke andre egenskaper av beslektet karakter. En ting er innlevelsesevne og sympati. Dette har utvilsomt positiv verdi. Men det er mulig at disse karakteregenskaper i kombinasjon med visse andre gir som resultat visse helheter som har større positiv verdi. I denne forbindelse fremstår evnen til faktisk å vise omtenksomhet for andre menne-sker og omsette den velvilje man føler i praktisk handlig kombinert med årvåkenhet og kritisk sans slik at man hjelper på den riktige måten, som spesielt viktig. Men der er andre karakteregenskaper som det kan være verdt å nevne som også synes å ha positiv verdi i seg selv. Evne til å vise utholdenhet synes å være positivt betont. Videre evne til ikke å gi opp i situasjoner som kan virke håpløse. Men man kan også nevne en lang rekke andre karakteregenskaper f.eks. likefremhet, ærlighet ovenfor seg selv og andre mennesker, generøsitet, evne til å oppmuntre, evne til å se de gode sider ved andre mennesker.

Man kunne kanskje bruke uttrykket "individualetiske" verdier om den type karaktertrekk som er nevnt ovenfor. Det er imidlertid andre egenskaper som et menneske kan ha som også synes å ha stor verdi i seg selv, men som har med kunnskap å gjøre. At en person er i besittelse av omfattende menneske-kunnskap kombinert med stor innsikt i hva som kan lindre andre menneskers lidelser synes umiddelbart å burde tilskrives en stor positiv verdi. Men også det å ha omfattende kunnskaper på et fagområde synes å ha positiv verdi. Selvfølgelig vil også evne til å lære fra seg de kunnskaper man har være av verdi og verdien vil være større desto lettere man kan lære fra seg. Det er imidlertid en lang rekke egenskaper som har tilknytning til det å skaffe seg kunnskap som også fremtrer som positive. Man kan nevne slike ting som klar og skarp evne til å trekke slutninger fra oppgitte premisser, evne til å gjennomskue gyldigheten i kompliserte resonnementer, evne til å se feil i mer eller mindre innfløkte slutningsrekker og klart påpeke dette, stor fantasi og dyktighet når det gjelder å formulere interessante problemer, velutviklet evne til kritisk granskning og testing av hypoteser. Karakteregenskaper og evner av denne natur kunne kalles intellektuelle ferdigheter.

La oss se på hva man kanskje kunne kalle sosiale verdier og nevne en del momenter i denne forbindelse. At et samfunn er slik at medlemmene i det over en lang tidsperiode lever fri for frykt og med gode mellommenneskelige relasjoner seg i mellom synes å ha positiv verdi i seg selv. Videre virker det ikke urimelig å si at den egenskap ved et samfunn at det er et samfunn hvor alle medlemmene har de samme mulighetene for å skaffe seg utdannelse og et levelig utkomme er en egenskap som er av positiv verdi. Det samme gjelder den egenskap ved et samfunn at alle dets medlemmer er like for loven. Vanskeligere blir det

selvfølgelig om man vil rangere de egenskaper som her er nevnt etter deres positive verdi og eventuelt ønsker å si noe om hvor mye større verdi en egenskap har enn en annen.

§8 Noen formelle overveielser i forbindelse med de egenskapene som er nevnt ovenfor.

De momenter som er nevnt ovenfor i §6 er forsåvidt av en mer vag, upresis og tentativ natur. Vi har ikke i denne paragrafen angitt noen mer "presise" setninger i L eller forsøkt å vise hvordan de påstandene om verdi som ble betraktet der kan formaliseres innenfor rammen av L.

Selvom formaliseringsspørsmålet muligens kan anses som et mer underordnet spørsmål i denne forbindelse skal vi likevel se litt på hvordan det vi har nevnt i foregående paragraf kan formaliseres.

La oss starte med de to egenskapene innlevelse og medfølelse som vi nevnte. La oss betegne egnskapen å være et par <x,t> der x er en person som har stor evne til innlevelse i andre menneskers sjelsliv ved tidspunktet t med "E1". La oss videre betegne egnskapen å være et par <x,t> der x er en person som ved tidspunktet t har en stor evne til medfølelse med andre mennesker med "E2". Man kan da hevde at utsagnet at x ved alle tidspunkter i et tidsintervall [t;1,t;2], der t;2 er et tidspunkt som kommer etter t;1, har stor evne til innlevelse i andre menneskers sjelsliv alltid har positiv verdi om x er en person. Denne påstanden kan uttrykkes formelt slik:

(1) (At;1)(At;2)(Ax)(t;1,t;2êT & t;1<t;2 & Ps(x) –> Pv(ut;<t;1,t;2>(E1,x)))

Er denne påstanden riktig? Det er klart at det ikke er lett å gi noe bevis for en slik setning i L. Det er også klart at det ikke er spesielt plausibelt å tro at setningen kan utledes i streng forstand fra andre setninger i L som er enklere og mer opplagte. På det nuværende tidspunkt er vi helt ute av stand til å angi noen slike setninger. Men man kan på den annen side ikke si at (1) på noen måte virker "dum og urimelig". Snarere er det slik at den synes å være i overenstemmelse med nokså vanlige oppfatninger. Ofte setter man en slik egenskap som innlevelse høyt. Av og til kan man vel finne lovprisninger av denne egenskap. Og fremfor alt kan vi ikke se at noen noensinne har fremlagt noe overbevisende argument mot (1). Det er slike grunner, og grunner av liknende art, som kan fremsettes til fordel for (1).

(1) sier noe om verdien til utsagnet ut;<t;1,t;2>(E1,x). En helt tilsvarende setning om verdien til ut;<t;1,t;2>(E2,x)) kunne også formuleres. Denne fremkommer ved å erstatte uttrykket "ut;<t;1,t;2>(E1,x))" i (1) med "ut;<t;1,t;2>(E1,x))"

Eksempel:

(1) G(x,t,w) –> Nv(μ;-1(Mg(w: F(x,t,w))))

Man kan tenke seg rekke konkrete setninger av denne typen. Vi nevner bare et eksempel hvor "G(x,t,w)" står for "x er et fossfall som har eksistert i tusenvis av år inntil tidspunktet t i verdenen w" og "F(x,t,w)" står for "Myndighetene i det land hvor x befinner seg sørger for å tørrlegge x fra og med tidspunktet t i verdenen w". Hvis man setter inn disse åpne setningene for G og F i (1) kan den setningen som fremkommer muligens virke tilforlatelig. Setningen sier da grovt sett ikke noe annet enn at det å tørrlegge fossefall som har eksistert i tusenvis av år har negativ verdi i seg selv.

§8.1 Et eksempel. Fosterdrap og tortur.

Tidligere i dette arbeidet har vi bare tatt opp og drøftet generelle verditeoretiske prinsipper som kan formuleres i språket til teorien KET1. Vi har ikke detaljert diskutert eller betraktet noen konkrete verditeoretiske prinsipper. I denne paragrafen skal vi se litt nærmere på et mer konkret eksempel og diskutere visse sider ved det. Vi er også interessert i å belyse hva som følger fra de generelle verditeoretiske prinsippene VER 1 – VER 4 som inngår i teorien KET1.

Eksemplet kan ikke uten videre fremstilles innenfor rammen av språket til KET1. La oss kalle språket til KET1 for L. Vi utvider derfor dette språket med de følgende predikater:

(1) "x er et voksent menneske ved tidpunktet t i verdenen w" – "Vo;w(x,t)"
(2) "x er et foster som starter sin utvikling ved tidspunktet t i verdenen w" – Fo;w(x,t)
(3) "x avlives y måneder etter tidspunktet t i verdenen w" – "AL;w(x,y,t)"
(4) "x utsettes for grusom tortur i y timer fra og med tidspunktet t i verdenen w" – "Tort;w(x,y,t)"

Det nye språket man får når L utvides med predikatene (1) – (4) kaller vi akkurat i denne paragrafen for L'.
I forbindelse med predikatet (3) betrakter vi, om x, y og t er vilkårlige entiteter, det utsagnet som er sant i alle de logisk mulige verdener w der man har at AL;w(x,y,t), mao. vi betrakter μ;-1(Mg(w: AL;w(x,y,t)). Det kan være hensiktsmessig å ha et litt kortere navn på dette utsagnet. Vi setter derfor:

$$Al(x,y,t) = \mu;\text{-}1(Mg(w: AL;w(x,y,t))).$$

Helt tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med predikatet (4). Det utsagnet som er sant i alle de verdener w der det er slik at Tort;w(x,y,t), dvs.
μ;-1(Mg(w; Tort;w(x,y,t))) betegner vi med "Tr(x,y,t)". Formelt sett kan denne definisjonen formuleres slik:

$$Tr(x,y,t) = \mu;\text{-}1(Mg(w; Tort;w(x,y,t)))$$

Når det ellers gjelder predikatene (1) – (4) er det en del setninger i L' som inneholder dem og som virker rimelige og nærmest trivelle. Andre som er mindre trivelle. For å være helt eksplisitte gir vi her en oversikt over de av disse setningene som vi har i tankene. Det dreier seg om:

E1 $Vo;w(x,t) \rightarrow Ps(x) \,\&\, t\hat{e}T \,\&\, w\hat{e}I$
E2 $Fo;w(x,t) \rightarrow t\hat{e}T \,\&\, w\hat{e}I$
E3 $AL;w(x,y,t) \rightarrow w\hat{e}I \,\&\, y\hat{e}Reell \,\&\, t\hat{e}T$
E4 $Tort;w(x,y,t) \rightarrow w\hat{e}I \,\&\, y\hat{e}Reell \,\&\, t\hat{e}T$
E5 $t\hat{e}T \,\&\, w\hat{e}I \rightarrow (Ey)(M(y) \,\&\, y = Mg(x: Fo;w(x,t)))$
E6 $t\hat{e}T \,\&\, w\hat{e}I \,\&\, y\hat{e}Reell \rightarrow (Ez)(M(z) \,\&\, z = Mg(x: Tort;w(x,y,t)))$
E7 $t\hat{e}T \,\&\, w\hat{e}I \,\&\, y\hat{e}Reell \rightarrow (Ez)(M(z) \,\&\, z = Mg(x: AL;w(x,y,t)))$

E1 – E4 er nærmest totalt trivielle. Listen er selvfølgelig ikke ment å være fullstendig. Ser man for eksempel på E1 sier denne at dersom x er et voksent menneske ved tidspunktet t i verdenen w så er x en person, t et tidspunkt og w en logisk mulig verden. E5 – E7 er de eneste setningene som ikke er av en helt opplagt natur. E5 sier at dersom t er et tidspunkt og

w en logisk mulig verden finnes mengden av alle de entiteter x som er slik at x er et foster som starter sin utvikling ved tidspunktet t i verdenen w. Denne eksistenssetningen kan ikke sies å være helt selvinnlysende. Det samme gjelder E6 og E7. Det virker imidlertid ikke urimelig å tenke seg at de relasjonene som korresponderer til (1) – (4) eksisterer i det kumulative hierarki. Hvis man aksepterer E5 – E7 er det mulig å vise dette.

Vi skal betrakte to funksjoner F(f,x,t) og G(f,x,t) som er definert slik:

Definisjon 8.1.1

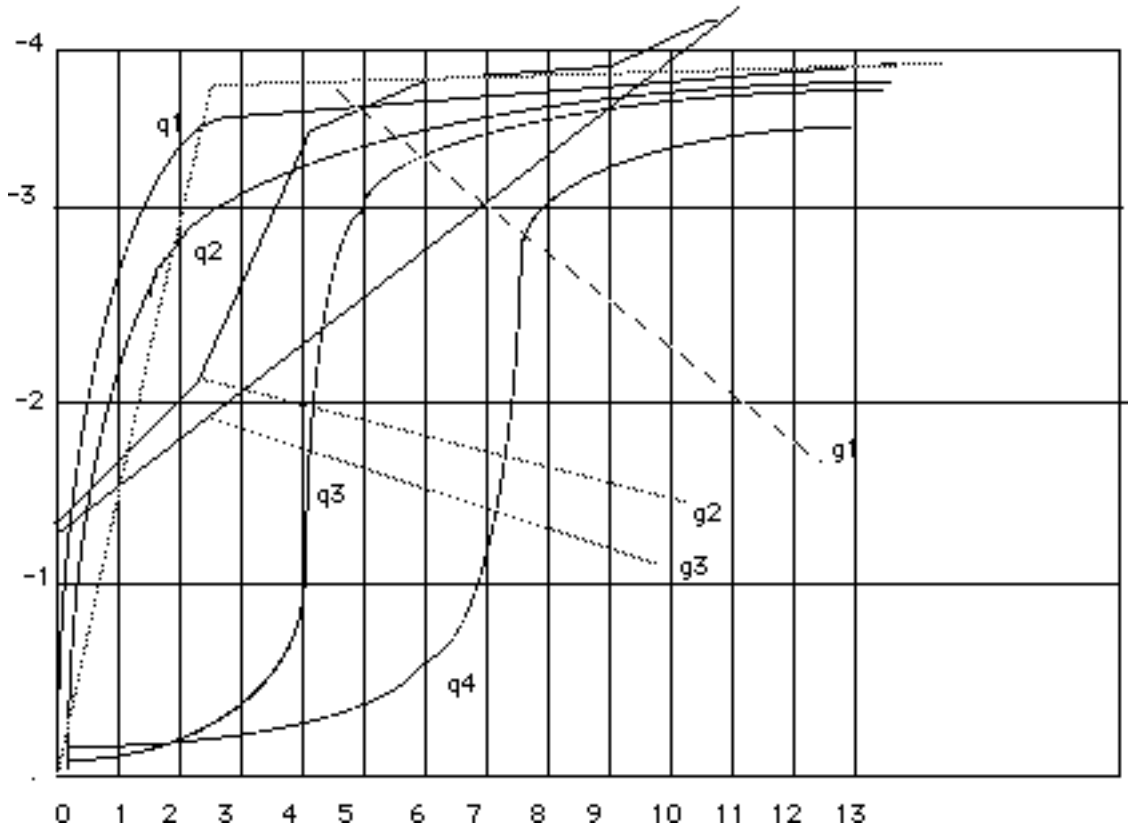
(i) F(f,x,t) = Mg(<y,f(Al(x,y,t))>: yêReell)
(ii) G(f,x,t) = Mg(<y, f(Tr(x,y,t))>: yêReell)

Ved hjelp av akiomene i KET1 og spesielt VER 1 – VER 4 kan man da utlede:

(3) VE(f) & Fo;w(x,t) –> F(f,x,t) : Reell –> Reell
(4) VE(f) & Vo;w(x,t) –> G(f,x,t): Reell –> Reell

Dette er omtrent det eneste som vi så langt kan utlede om F(f,x,t) og G(f,x,t) om vi bare holder oss til de ikke-logiske aksiomene som inngår i KET1 og E1 – E7 ovenfor.

FIGUR 1



Den tanke at alle mulige konsekvenser ved et handlingsalternativ – og mer generelt at alle de saksforhold som beskrives av utsagn – kan sammenlignes med hensyn på verdi, og at de også i prinsippet, teoretisk sett, kan sammenlignes kvantitativt er naturligvis en sterkt kontroversiell tanke. Av noen anses den stundom for direkte absurd. Det må understrekes at vi i høy grad ikke er fremmed for den tanke at denne teori virkelig er absurd, kanskje også at

den muligens kan være tåpelig og skadelig.[3]

Imidlertid tar vi ikke her uten videre noe standpunkt til denne tese som vi har uttrykt ved de verditeoretiske setningene VER 1 – VER 4. Snarere er vi interessert i hva som følger fra den. Så langt har vi nevnt en følgesetning nemlig konjunksjonen av (5) og (6) ovenfor. I seg selv er det selvfølgelig ikke noe selvmotsigende eller absurd ved denne konsekvens. Det virker derfor uberettiget å si at akkurat dette er et avgjørende argument mot KET1. Noe som derimot kan ha en viss interesse i denne sammenheng er å undersøke hva som følger fra mer spesifikke hypoteser om F(f,x,t) og G(f,x,t) når man forutsetter henholdsvis at VE(f) & Fo;w(x,t) og Vo;w(x,t).

Det er i og for seg intet i de premisser vi har nevnt som impliserer at disse reelle funksjonene, selv i begrensede intervaller, er kontinuerlige. La oss derfor anta for eksempel at F(f,x,t) er kontinuerlig i intervallet <0,9] og G(f,x,t) er kontinuerlig i intervallet <0,10^3] om f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn. Heller ikke dette gir en noen spesifikk informasjon om hvordan disse to funksjonene forholder seg til hverandre. Det kan derfor være av interesse å se på noen muligheter.

På figuren ovenfor har vi skissert grafene til noen funksjoner q1 – q4, som det er meningen at man skal betrakte sammen med F(f,x,t), og visse funksjoner g1 – g3, som det er meningen å se i sammenheng med G(f,x,t). Disse funksjonene som i seg selv er helt harmløse, er grafisk skissert og ikke definert presist matematisk. Dette siste synes å være av underordnet betydning i denne sammenheng. La oss først si noen ord om en av disse funksjonene, q1, i den utstreknig man kan si noe bestemt om den ut fra grafen. Man ser at q1(x) ligger nokså nær opp til –3.5 når x er 2. Og at den etterhvert nærmer seg -4 når x>2. Videre ser man at q1(x) er ca. 2.6 – 2.7 når x befinner seg i nærheten av 1 og den går mot -3/4 når x går mot 0. Hvis man vil kan man "måle" på figuren om man vil ha mer nøyaktige anslag.

La oss nå se litt på hva som følger om man går ut fra den følgende "hypotese":

H1 Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t) têT &VE(f) –>(Ek)(kêReell & k>0 &
(Az)(zêReell &zê<0,9] –> F(f,x,t)(z) = (k*q1(z))) &
(Az)(zêReell &zê<0,10^3] –> G(f,x,t)(z) = (k*g3(z))))

Formålet er altså kun å foreta visse drøftelser for å danne seg et helt tentativt bilde av i hvilken grad disse to påstandene er i overenstemmelse med våre intuisjoner. En påstand av denne typen kan virke grellt urealistisk. Det er håpe at leseren er klar over at vi finner den høyest mistenkelig og at endel av formålet her bare er å drøfte denne påstanden kritisk.

La oss først si noe om tallene på X-aksen i diagrammet ovenfor. Når man betrakter kurvene g1 – g3 er det meningen at 1,2,3,4,.... etc skal representere 1*10^2, 2*10, 3*10^2,.... timer. Med andre ord vil ethvert intervall av typen [n,n+1] representere et forholdsvis langt tidsrom. I forbindelse med kurvene q1 – q4 skal tallene på X-aksen tas slik de står. Dette antyder med en gang en merkverdighet ved antagelsen H1. Man ser at H1 impliserer at dersom Vo;w(x,t) & VE(f) så har man at G(f,x,t)(1) = k*1.5 for noe k>0, men at G(f,x,t)(2) = k*1.75. Man føler seg tilbøylig til å spørre om ikke det at en person x fra og med tidspunktet t utsettes for grusom i tortur i 200 timer er mange ganger verre enn at x fra og med t utsettes for grusom tortur i 100 timer. Skulle ikke – hvis man nå først er villig til å spekulere over dette – G(f,x,t)(2*10^2) ≥ 2* G(f,x,2)(10^2), eller noe i denne stil? Man kan

[3] Hva som kanskje kan irritere en mest i denne forbindelse er den pseudovitenskapelige og kvasimatematiske karakter som overveielser av den typen som her gjennomføres kan ha.

derfor ha inntrykk av at kurven g3 stiger noe for langsomt. Muligens burde den være meget brattere i intervallet <0,10^3]. Det er imidlertid et aspekt ved g3 som muligens kan være rimelig og det er at g3 er monotont stigende. Dette er til en viss grad i overenstemmelse med ens intuisjoner. Desto lengre en person utsettes for grusom tortur desto verre er det.

Man kan nå sammenligne g3 og q1. Man ser fra grafene at om man antar riktigheten av H1 følger at det å avlive et 2 uker gammelt foster har omtrent samme negative verdi det å utsette en person for grusom tortur i nærmere 300 timer, dvs. i 12.5 døgn. Det er ikke helt lett å si noe om hvordan man bør reagere på dette. Det kan virke uhyre strengt. Dette samme strenge inntrykk gir teorien om man sammenligner F(f,x,t)(3) og G(f,y,t)(10^3). Man ser at disse to funksjonsverdiene er omtrent like. Dette innebærer at H1 impliserer at det å avlive et 3 måneder gammelt foster har omtrent samme negative verdi som det å utsette en person for grusom tortur i ca. 41.6 døgn. Hvordan stemmer dette med ens mer umiddelbare verdioppfatninger? I våre øyne virker dette også svært strengt. Vi har et visst inntrykk av at teorien H1 i dette henseende samsvarer med synspunktene til en temmelig ekstrem abortmotstander.

La oss studere ytterligere noen trekk ved denne teorien. Ser man på grafen til q1 i ærheten av 9 ser man q1(9) ligger noe over g3(9), dvs. at F(f,x,t)(9) har større negativ verdi en G(f,y,t)(9). Dette innebærer med andre ord at det å avlive et 9 måneder gammelt foster har større negativ verdi en det å utsette en person for grusom tortur i la oss si 900 timer. Dette kan vel diskuteres selv om man kvier seg for å ta del i en debatt på grunn av det ubehag man kan føle ved å måtte avveie disse tingene mot hverandre. Noen vil kanskje være av den mening at tortur av denne lengde og art er verre og er et større etisk onde i seg selv enn det å ta livet av et nyfødt barn eller et barn like før fødselsøyeblikket. I så tilfelle svarer ikke de to kurvende q1 og g3 helt til verdi-intuisjonene hos denne type personer selvom de kan samsvare med noen av ens intuisjoner på andre områder.

Betraktninger av den art som nå har blitt illustrert i forbindelse med q1 og g3 kan gjennomføres i forbindelse med de andre grafene på figuren. Umiddelbart fortoner ikke noen av disse adre mulighetene seg som mer plausible enn dem vi har undersøkt. q3 og q4 virker mistenkelige fordi de stiger for langsomt til å begynne med. g1 virker uplausibel fordi den er for bratt og dernest flater seg for mye ut. Dette kan virke eiendommelig. Av delvis samme grunner som ved g3 virker også g2 noe mistenkelig.

Det kan muligens være av en viss interesse å sammenfatte noen av punktene i denne uhyre løse diskusjonen i form av endel krav som muligens kan stilles til F(f,x,t) og G(f,y,t) i det man forutsetter at VE(f) & Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t).

Et krav som virker rimelig om man aksepterer forutsetningene E1 – E7 og prinsippene VER 1 – VER 4 er at dersom VE(f) & Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t) er F(f,x,t)(z) negativ om zê<0,9] og tilsvarende G(f,y,t) negativ om zê<0, 10^3]. Man kunne derfor muligens betrakte:

C1 VE(f) & Fo;w(x,t) & zê<0,9] –> F(f,x,t)(z)<0
C2 VE(f) &Vo;w(y,t) & zê<0,10^3] –> G(f,y,t) <0

Videre virker det nokså rimelig å tro at F(f,x,t) og G(y,x,t) er strengt nedadstigende i henholdsvis intervallene <0,9] og <0,10^3]. I så fall kunne de følgende krav virke fornuftige:

C3 VE(f) & Fo;w(x,t) & a,bê<0,9] & a<b –> F(f,x,t)(a)> F(f,x,t)(b)
C4 VE(f) & Vo;w(y,t) & a,bê<0,10^3] & a<b –> G(f,y,t)(a)> G(f,y,t)(b)

Ovenfor så vi også på den mulighet at det kanskje kunne være noe som talte til fordel for at G(f,y,t)(b) ≤ 2*G(f,y,t)(a) om 5≤a & 2*a≤10^3 og b=2*a. La oss stille opp dette om et krav:

C5 VE(f) & Vo;w(y,t) & 0<a & 2*a≤10^3 & b=2*a –>
G(f,y,t)(b) ≤ 2*G(f,y,t)(a)

Det følgende kravet synes også å ha en viss interesse, men synes strengt og til fordel for dem som er mot abort:

C6 VE(f) & Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t) –>
(i) F(f,x,t)(1/2) > G(f,y,t)(50)
(ii) F(f,x,t)(3) < G(f,y,t)(8*10^2)
(iii) F(f,x,t)(9) > G(f,y,t)(9*10^2)

Det tredje punktet impliserer at det er verre å utsette en voksen person for grusom tortur i 37.5 døgn enn der er å avlive et nyfødt barn. Vi håper at leseren ikke tror at vi mener at dette er en ukontroversiell påstand.

Endelig virker det ikke totalt urimelig å anta at F(f,x,t) og G(f,y,t) er kontinuerlige i henholdsvis intervallene <0,9] og <0,10^3] om man forutsetter at VE(f) & Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t).

Vår første konklusjon er at ingen av funksjonene som er antydet på diagrammet ovenfor oppfyller alle disse kravene. Ser man derimot på funksjonene g0 og q0 på figuren på neste side skulle det være forholdsvis lett å se at disse oppfyller kravene om vi antar at:

H2 Fo;w(x,t) &Vo;w(y,t) têT &VE(f) –>(Ek)(kêReell & k>0 &
(Az)(zêReell &zê<0,9] –> F(f,x,t)(z) = (k*q0(z))) &
(Az)(zêReell &zê<0,10^3] –> G(f,x,t)(z) = (k*g0(z))))

Funksjonene q0 og g0 kan også defineres helt eksakt på en forholdvis enkel måte siden de er sammensatt av rette linjer.

Definerer vi g0 som unionen av de følgende to funksjoner:

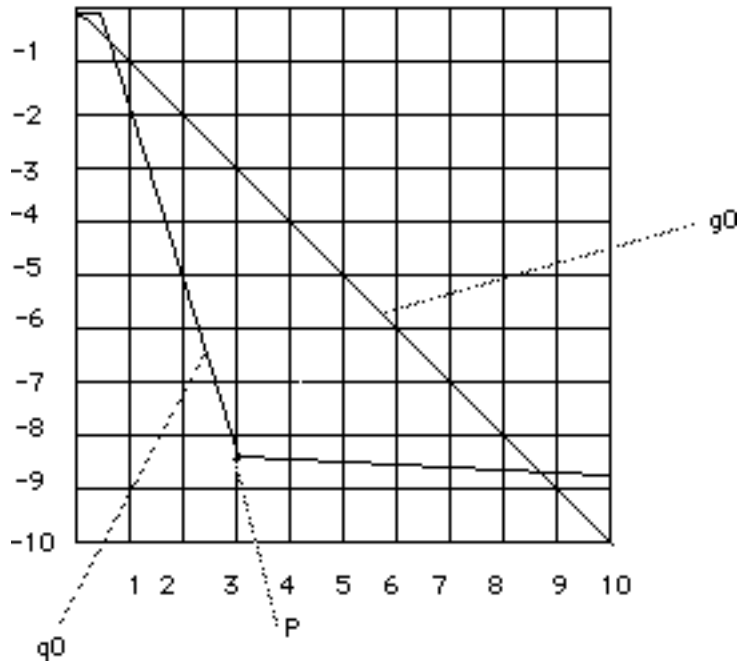
g0.1 = Mg(<x, –(1/100)*x>: xê<5, 10^3])
g;0.2 = Mg(<x, –(4/500)*x – (1/100)>: xê<0,5])

ser man lett at g0 er som på figuren. Hvis man videre definerer q0 som unionen: q0.1Uq0.2Uq0.3 der:

q0.1 = Mg(<x, –(33/10)*x + (7/5)>: xê<1/2,3])
q0.2 = Mg(<x, –(1/24)*x – (201/24)>: xê<3,9])
q0.3 = Mg(<x, –(1/4)*x – (1/8)>: xê<0,1/2])

ser man også at grafen til q0 blir som på figuren. Ved hjelp av definisjonene ovenfor, antagelsen H2 samt de øvrige antagelser som har blitt nevnt er det forholdsvis lett å se at G(f,y,t) og F(f,x,t) oppfyller kravene ovenfor og dessuten og dessuten at de er kontinuerlige for de relevante verdier av x,y,t.

Figur 2



Merk at H2 bare representerer en nokså vilkårlig teori i et helt kontinuum av teorier som oppfyller kravene C1 – C6. Flytter man punktet P på figuren noe oppover eller nedover i intervallet [–9,–8] uten ellers å endre noe vesentlig får man andre funksjoner som oppfyller kravene. Det kan også bemerkes at det formelle bevis for at H2 impliserer C1 – C6 er såpass enkelt, trivielt og kjedelig at det neppe har noen interesse å gjennomføre det i detalj. La oss også nevne at de verditeoretiske setningene om etiske verdifunksjoner som inngår i KET1 sammen med premissene E1 – E7 ikke i seg selv impliserer kravene C1 – C6. Det er følgelig mulig å innta helt andre verdistandpunkter i denne forbindelse når det gjelder funksjonene F(f,x,t) og G(f,x,t).

§8.2 Verdien til fordelinger.

Det er i og for seg ikke noe ved den verditeorien som har blitt beskrevet ovenfor som logisk sett utelukker at noen fordelinger av goder (eventuelt onder) kan ha større verdi i seg selv enn andre fordelinger av de samme goder. Heller ikke er det noe som direkte utelukker at visse fordelinger av en bestemt klasse med goder kan ha positiv verdi, mens andre fordelinger av de samme goder kan ha negativ verdi. La oss se på noen eksempler for å belyse dette punkt.

Vi forutsetter nå at L;ê[Δ;2] utvides med det følgende predikat "x har intense smerter ved tidspunktet t i verdenen w" som i denne paragrafen forkortes med "ISm;w(x,t)". Utsagnet at x har intense smerter ved tidspunktet t vil da være μ;-1(Mg(w: ISm;w(x,t)), kort sagt det utsagnet som er sant i alle de logiske mulige verdener hvor x ved tidspunktet t har intense smerter. Anta t' er et tidspunkt som kommer etter tidspunktet t;0. Da vil

μ;-1(Mg(w: (At)(t;0≤ t ≤ t' –> ISm;w(x,t))

være det utsagnet som sier at x har intense smerter ved alle tidspunktene i tidsintervallet som strekker seg fra og med tidspunktet t;0 til og med tidspunktet t' .

Vi har så langt ikke innført noen metrikk over klassen av tidspunkter. Men la oss nå forutsette at man innfører predikatet "z er et reelt tall som angir avstanden mellom tidspunktet

t og tidspunktet t' i timer ". La oss forkorte dette med "Dist(z,t,t')". Vi behøver ikke her å spesifisere de lover som skal gjelde for dette predikatet. Det er imidlertid klart at dersom t=t' bør man ha at Dist(0,t,t'), Videre skulle det være klart at dersom Dist(a,t,t') så skulle man også ha at Dist(a,t',t). Ytterligere skulle det være klart at dersom Dist(z,t,t') holder så finnes det et og bare et reellt tall z som er slik at Dist(z,t,t'). Det skulle også være rimelig å hevde at dersom Dist(a,t,t') holder så er a et reellt tall ≥0 og t,t' tidspunkter. Endelig virker det rimelig å hevde at dersom t,t' og t'' er tre tidspunkter der vi har at t ≤t' ≤ t'' så har man at Dist(a1+a2,t,t'') dersom det holder at Dist(a;1,t,t') og Dist(a;2,t',t''). Setter man derfor per definisjon

D = Mg(<<x,y>,z>: Dist(z,x,y))

skulle det være klart at man har D: TXT –> Reell. Det tidspunktet som kommer e timer etter tidspunktet t betegner vi med "t+e". Man kan definere dette ved:

t+e = (iy)(Tp(y) & t≤y & D(t,y) =e)

Anta nå at x og y er to personer og at e er et eller annet reellt tall. La oss se på utsagnet u1(x,y,t,e) definert ved:

u1(x,y,t,e) = μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+2*e –> ISm;w(x,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+e –> ISm;w(y,t))

Dette utsagnet u1(x,y,t,e) uttrykker at x har intense smerter i intervallet fra t til t+2*e, mens y har intense smerter i intervallet fra t til t+e. Er altså u1(x,y,t,e) sant innebærer dette at x har intense smerter dobbelt så lenge som y. Man kan nå sammenligne dette utsagnet med det følgende som er definert slik:

u2(x,y,t,e) = μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+1.5*e –> ISm;w(x,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+1.5*e –> ISm;w(y,t))

Dette utsagnet sier at både x og y har intense smerter i et like langt tidsintervall etter tidspunktet t, nemlig det tidsintervallet som som strekker seg fra t til t+1.5*e.

Det virker ikke urimelig å si at begge disse to utsagnene beskriver forhold som har negativ verdi i seg selv. Samtidig virker det heller ikke helt urimelig å påstå at det forhold som beskrives av u2(x,y,t,e) har noe mindre negativ verdi enn det forhold som beskrives av u1(x,y,t,e). Dette synes i det minste å harmonere med de følgende overveielser. Anta man bare kan velge mellom to handlingsalternativer h1 og h2. Anta videre at u1(x,y,e,t) beskriver en mulig konsekvens ved det første alternativet og u2(x,y,t,e) beskriver en mulig konsekvens ved det andre alternativet. Anta videre at disse to konsekvensene inntreffer med den samme sannsynlighet ved de to alternativene og at vekten til alle andre konsekvenser ved de to alternativene er den samme. Under disse omstendigheter virker det ikke urimelig å hevde at h2 er bedre enn h1. I det første tilfelle lar man en person lide dobbelt så meget som en annen. I det andre tilfelle lar man dem lide like mye. Prima facie virker derfor det siste mindre ille enn det første.

Det er mulig at en mindre endring i dette eksemplet kan gjøre det mer overbevisende. Man kan muligens hevde at de to utsagnene ovenfor ikke er helt sammenlignbare fordi det ikke er utelukket ved det første utsagnet at y kan ha intense smerter i intervallet fra t+e til t+2*e. Videre kunne man hevde at det er nødvendig å si noe i forbindelse med det andre utsagnet u2(x,y,t,e) om hvordan x og y lider i intervallet fra t+1.5*e til t+ 2*e om dette skal kunne sammenlignes med u1(x,y,t,e). I stedet for disse to utsagnene kunne man derfor kanskje ha betraktet de følgende to noe mer kompliserte utsagn:

u*1(x,y,t,e) = μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+2*e –> ISm;w(x,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+e –> ISm;w(y,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t+e≤t'≤t+2*e –> ¬ISm;w(x,t)))

og

u*2(x,y,t,e) = μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+1.5*e –> ISm;w(x,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t≤t'≤ t+1.5*e –> ISm;w(y,t)) Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t+1.5*e≤t'≤t+2*e –> ¬ISm;w(x,t)))Ω
μ;-1(Mg(w: (At')(t+1.5*e≤t'≤t+2*e –> ¬ISm;w(y,t))

Poenget med dette eksemplet og de overveielsene vi har fremlagt her er at de viser, såvidt vi kan se, at teorien KET1 ikke rammes av de innvendinger som ofte rettes mot rent utilitaristiske teorier og som går på at disse ikke tar hensyn til fordelingen av smerte og lyst.

§8.3 Noen betraktninger over et hedonistiske standpunkt.

På dette punkt kan det også være passende å minne om at det ikke er helt enkelt å sammenligne en teori av typen KET1 med de klassiske utilitaristiske teoriene som ble fremlagt av Bentham og Mill. Det virker som om f.eks. Bentham synes å hevde at det *eneste* som dypest sett har positiv verdi i seg selv er bevissthetstilstander som på en eller annen måte er preget av behag i større eller mindre grad, og at det *eneste* som har negativ verdi i seg selv er bevisst-hetstilstander som er smertefulle i større eller mindre grad. Det bør da bemerkes at hvis man har en slik verditeori og forsøker å formalisere den synes det vanskelig å unngå å bruke predikatet "x er noe som har positiv indre verdi i seg selv". I språket til teorien KET1 inngår imidlertid bare det tilsvarende, men ikke identiske predikat: "x er et utsagn som beskriver et forhold som har positiv verdi i seg selv". I denne teorien kan man derfor si at verdipredikatene angir egenskaper ved utsagn og ikke egenskaper ved bevissthetstilstander. Videre vil det være slik at relasjonen "minst like stor verdi i seg selv som" er en relasjon mellom utsagn og derfor ikke en relasjon mellom bevissthetstilstander. Det er derfor ikke umiddelbart gitt hvordan man skal kunne uttrykke en påstand som at bare behagsbetonte bevissthetstilstander har positiv verdi i seg selv innenfor språket L;ê[Δ;2], eller utvidelser av dette. I det følgende skal vi se litt nærmere på dette. Vi skal utvide språket til KET1 med ytterligere noen predikater slik at det blir mulig å si noe om lyst og smerteopplevelser innenfor det utvidete språket. Dernest skal vi i dette utvidete språk se hvordan man kan uttrykke visse teser som i en hvis forstand kan sies å uttrykke at bare smerteopplevelser har negativ verdi i seg selv og bare behagsbetonte opplevelser har positiv verdi i seg selv.

La oss tenke oss at man utvider språket til KET1 med de følgende predikater:

(1) "x er en mulig smerteopplevelse" – "Sme(x)"
(2) "x er en mulig behagsbetont opplevelse" – "Bh(x)"
(3) "x opplever y fra og med tidspunktet t;1 til og med tidspunktet t;2 i verdenen w" – "Oppl;w(x,y,t;1,t;2)"
(4) "z er et reellt tall som angir hvor mye mer intens opplevelsen x er i forhold til opplevelsen y" – "RelI(z,x,y)"
(5) "z er et reellt tall som angir avstanden i minutter mellom tidspunktet t og tidspunktet t'" – "Dist(z,t,t')"

Innenfor dette rikere språket kan man formulere en lang rekke påstander om smerte- og lystopplevelser som man selvfølgelig ikke uten videre kan formulere innenfor språkrammen til KET1.

La x være en smerteopplevelse. Da vil utsagnet at individet a opplever x fra og med tidspunktet t til og med tidspunktet t' være sant i nøyaktig de og bare de verdener w der man har Oppl;w(a,x,t,t'). Med andre ord har man at dette utsagnet er μ;-1(Mg(w:

Oppl;w(a,x,t,t'))). Nå synes det som om den hedonistiske doktrine nettopp innebærer at det eneste som dypest sett har negativ verdi i seg selv er smerteopplevelser av forskjellig varighet og intensitet. Alt mulig annet har bare positiv eller negativ verdi som middel alt ettersom i hvilken grad det har en tendens til å frembringe lyst eller smerte. Denne tanken kan man foreslå å uttrykke på den følgende måte innenfor den språkrammen vi her har satt opp:

HE1 Nv(x) <–> (Ez)[Sme(z) & (Et)(Et')(Ey)(t,t'êT &
x = μ;-1(Mg(w: Oppl;w(y,z,t,t'))))][4]

Hva setningen H1 uttrykker er at x er et utsagn som beskriver noe som har negativ verdi i seg selv hvis og bare hvis det finnes en mulig smerteopplevelse z, tidspunkter t,t' og et individ y slik at x er identisk med utsagnet at y opplever z fra og med tidspunktet t til og med tidspunktet t'.

Man kunne formulere et tilsvarende prinsipp for utsagn som beskriver forhold som har positiv verdi i seg selv:

HE2 Pv(x) <–> (Ez)[Bh(z) & (Et)(Et')(Ey)(t,t'êT &
x = μ;-1(Mg(w: Oppl;w(y,z,t,t'))))][5]

Disse to tesene H1 og H2 innenfor den utvidete språkrammen vi her arbeider med kunne kanskje sies å representere formaliseringer av den hovedtanke innen hedonismen at smerte i forskjellige former er det eneste som har negativ verdi i seg selv og lystopplevelser av forskjellig karakter det eneste som har positiv verdi i seg selv.

Så langt har vi ikke knyttet de predikatene som er nevnt ovenfor til den kvantitative verditeorien representert ved tesene VER1 – VER4. Det kan være av en viss interesse å se på visse muligheter her. Innenfor hedonismen, og man kan da kanskje tenke på Bentham, synes det som om man er av den mening at det er teoretisk mulig så og si å måle intensiteten til smerte og lyst-opplevelser. Dette innebærer at man tenker seg at det kan ha mening å si om en smerte-opplevelse at den er for eksempel 10 ganger mer intens enn en annen smerte opplevelse. Helt tilsvarende om behagsopplevelser. Det synes også som om man tenker seg at man kan sammenligne smerteopplevelser og lystopplevelser med hensyn på intensitet. En lystopplevelse kan for eksempel være dobbelt så intens som en bestemt smerteopplevelse. Mao. virker det som man anser predikatet (4) på listen ovenfor som meningsfullt. Hvis man nå går med på dette virker ikke de følgende setninger i det utvidete språket som nå betraktes å være hinsides enhver fornuft. De er helt analoge med setningene som inngår i AV19 som ble nevnt i §4.2:

HE3
(i) RelI(z,x,y) –> zêReell
(ii) RelI(z,x,y) –> (E!z)(RelI(z,x,y))
(iii) RelI(z,x,y) –> RelI(z^(–1),y,x)
(iv) RelI(z;1, x,y) & RelI(z;2,y,u) –> RelI(z;1*z;2,x,u)
(v) (Ez)RelI(z,x,y). <–> x,yêMg(u: Bh(u) v Sme(u))
(vi) RelI(z,x,x) –> z=1
(vii) RelI(z,x,y) –> RelI(1,x,x) & RelI(1,y,y)
(viii) RelI(z,x,y) &Bh(x) & Sme(y) –> z<0
(ix) RelI(z,x,y) & Bh(x) & Bh(y) –> z>0
(x) RelI(z,x,y) & Sme(x) & Sme(y) –> z>0

[4] Vi minner om at "Nv(x)" leses "x er et utsagn som beskriver et forhold som har negativ verdi i seg selv".
[5] Uttrykket "Pv(x)" leses "x er et utsagn som beskriver et forhold som har positiv verdi i seg selv".

(xi) RelI(z,x,y) –> z≠0
(xii) RelI(z,x,y) & Bh(y) & z >0 –> Bh(x)
(xiii) RelI(z,x,y) & Sme(y) & z>0 –> Sme(x)
(xiv) ¬(Ex)(Bh(x) & Sme(x))

Vi innførte ovenfor predikatkonstruksjonen "x er et reelt tall som angir avstanden i minutter mellom tidspunktet t og tidspunktet t'". Denne ble forkortet med "Dist(x,t,t')". Vi skal ikke her gå dypere inn på spørsmålene som oppstår ved måling av tid. Vi innskrenker oss bare til å gjøre rede for en del setninger i det språket som har blitt angitt som vi finner forholdsvis rimelige når det gjelder dette. Vi skal betrakte de følgende ikke-logiske aksiomer for predikatet "Dist(x,t;1,t;2)":

(ME1) Dist(x,t;1,t;2).->. xêReell & t;1,t;2êT
(ME2) t;1,t;2êT.->.(E!x)(Dist(x,t;1,t;2))

Den første av disse to setningene uttrykker, som man ser, at dersom x er et tall som angir tidsavstanden i minutter mellom tidspunktene t;1 og t;2 så er x et reelt tall og t;1 og t;2 tidspunkter. Den andre setningen uttrykker at om t;1 og t;2 er tidspunkter finnes det alltid ett og bare ett reelt tall som angir tidsavstanden mellom dem. La oss bemerke at vi bruker "d(t;1,t;2)" som forkortelse for "(ix)(Dist(x,t;1,t;2))". Den neste setningen om relasjonen Dist som vi vil betrakte er:

(ME3) (Ef)[f: Reell –(1-1,på)–>T &
(Ax)(Ay)(x,yêReell.->(x<y <-> f(x)<f(y))) &
(At;1)(At;2)(t;1,t;2êT.->. d(t;1,t;2) = Abs(f;-1(t;1)–f;-1(t;2)))]

De to første konjunktene i konjunksjonen som kommer etter eksistens-kvantoren i (ME3) uttrykker at f er en isomorfi mellom klassen av de reelle tall og klassen av tidspunkter. Merk at hvis f er en eller annen relasjon betegner vi den konverse relasjon med "f;-1". Merk også at "Abs(x)" leses "absolutt-verdien til tallet x". Er x et reelt tall vil også uttrykket "|x|" bli brukt for å betegne absoluttverdien til x. I det følgende vil vi bruke "t;1+a" der aêReell for å betegne det entydig bestemte tidspunktet t;2 som kommer etter t;1 og hvor avstanden mellom t;1 og t;2 er a. Tilsvarende vil vi bruke t;1–a , hvor a er et reelt tall, til å betegne det tidspunktet t;2 som kommer før t;1 og hvor avstanden mellom dette tidspunktet og t;1 er a. Uttrykket "<t;1,t;2]" betegner det halvåpne tidsintervallet som består av alle de tidspunkter som kommer etter t;1 og som samtidig enten kommer før t;2 eller er identisk med t;2. Tilsvarende betegner [t;1,t;2] klassen av alle tidspunkter som ligger mellom t;1 og t;2, inkludert disse tidspunktene.

Når det gjelder predikatene på listen ovenfor kan det også være av interesse å ta i betraktning den følgende setning som sier at funksjonen som tilordner ethvert firetuple <x,y,t,t'>, der man har (Sme(y) v Bh(y)) & (Ew)(wêI & Oppl;w(x,y,t,t')), utsagnet μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t'))) er en-entydig. For å kunne formulere setningen på en kompakt måte innfører vi den følgende definisjon:

Definisjon 8.3.1
(i) DP = Mg(<x,y,t,t'>: (Sme(y) v Bh(y)) & (Ew)(wêI & Oppl;w(x,y,t,t')))
(ii) F = Mg(<<x,y,t,t'>, μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t')))>: <x,y,t,t'>êDP)

Setningen kan da formuleres slik:

HE4 F : DP –(1-1) –>U

I lys av HE3 ser man at dersom man tar sitt utgangspunkt i en eller annen behagsbetont mulig opplevelse a vil intensiteten til enhver annen lyst- eller smerteopplevelse kunne sammenlignes med intensiteten til a. Er b en annen behagsbetont opplevelse vil man ifølge HE3 ha at det finnes et entydig bestemt positivt reellt tall z slik at RelI(z,b,a). Er intensiteten til b mindre enn den til a vill dette tallet være mindre enn 1, men større enn 0. Er intensiteten til b større enn a vil tallet være større enn 1. Tilsvarende om man tenker seg at c er en eller annen smerte opplevelse. Man vil også da ha at det finnes et entydig bestemt reellt tall z lik at RelI(z,c,a). Siden c er en smerteopplevelse vil i dette tilfelle z ha negativ verdi. Er z= –1 innebærer dette at intensiteten til b i negativ retning er like stor som intensiteten til a i positiv retning. Populært sagt er da c like ille som a er god. Er z i dette tilfelle for eksempel –20 innebærer dette at c har en intensitet som er 20 ganger så stor om den til a. Tenker man seg derfor at man tar sitt utgangspunkt i en bestemt behagsbetont opplevelse a og setter K;a = Mg(<c, (iz)(RelI(z,c,a))>: Be(c) v Sme(c)) vil K;a være en funksjon som til enhver lystopplevelse tilordner et bestemt positivt tall og til enhver smerteopplevelse et negativt tall. K;a vil imidlertid ikke uten videre være en etisk verdifunksjon i den betydning vi tidligere har snakket om slike funksjoner. En slik funksjon er en funksjon som til ethvert utsagn tilordner et reelt tall som avspeiler den grad av indre verdi som det forhold utsagnet beskriver har. K;a derimot er en funksjon der domenet er klassen av alle smerteopplevelser og behagsbetonte opplevelser og ikke klassen av utsagn.

Ifølge HE2 er de eneste utsagn som beskriver forhold som har positiv verdi i seg selv utsagn av typen μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t'))) der y er en behagsbetont opplevelse. Tilsvarende har man, om man holder seg til HE1, at de eneste utsagn som beskriver forhold som har negativ verdi i seg selv er utsagn av typen μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t'))) der y er en smerteopplevelse og t,t' tidspunkter. Hvis man nå fra en hedonistisk synsvinkel skulle tilskrive et utsagn av typen μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t'))) der y er en smerteopplevelse en verdi ville det være naturlig ikke bare å ta i betraktning intensiteten til smerteopplevelsen y, men også lengden til det tidsintervallet hvor individet x opplever y, mao. d(t,t'). Desto lengere tid man har smerteopplevelsen desto større negativ verdi har dette utsagnet og desto større intensiteten til opplevelsen er desto større negativ verdi får det forhold utsagnet beskriver. Tenker man seg derfor at man tar sitt utgangs-punkt i en fiksert behagsbetont opplevelse a synes det ikke urimelig fra en hedonistisk synsvinkel å tilskrive et utsagn av typen μ;-1(Mg(w: Oppl;w(x,y,t,t'))) en verdi lik K;a(y)*d(t,t') om man har at Sme(y) v Bh(y).

I lys av dette er det naturlig å definere en bestemt funksjon Q;a fra DP over i mengden av de reelle tall ved å sette:

Q;a(<x,y,t,t'>) = (iz)(RelI(z,y,a))*d(t,t') om <x,y,t,t'>êDP.

Man har altså at Q;a : DP –> Reell for alle a der Bh(a). Siden F er en-entydig kan man definere, for hver a der man har at Bh(a), en funksjon H;a: F"DP –> Reell ved å sette H;a = Mg(<x, Q;a(F;-1(x))>: xêF"DP). Endelig kan denne utvides til en funksjon H*;a som tilordner ethvert utsagn et reelt tall ved å sette:

H*;a = H;aU Mg(<x,0>: xê(U–F"DP)).

Den følgende tese sier at dersom a er en logisk mulig behagsbetont opplevelse så er H*;a en etisk verdifunksjon.

HE5 (Aa)(Bh(a) –> VE(H*;a))

På dette punkt kan det være hensiktsmessig å stanse opp og sammenfatte det vi så langt har gjort. La oss akkurat her kalle språket til KET1 for L. Vi har nå betraktet en utvidelse av L med visse nye ikke-logiske predikater, nemlig predikatene (1) – (5) ovenfor. La oss betegne denne utvidelsen av språket L med "L+". Innenfor denne utvidete språkrammen har vi så formulert de "hedo-nistiske" prinsippene HE1 – HE5, samt tesene ME1 – ME3 om tid. Fra KET1, selv med språket utvidet til L+ , følger ikke noen av setningene HE1 – HE5. Dette skulle være temmelig opplagt. Det følger derfor at dersom noen er villig til å akseptere KET1 kan man ikke derav slutte at vedkommende også bør akseptere HE1 – HE5.

Utvides språket til KET1 til L+, og legger man til formlene HE1 – HE5 som nye ikke-logiske aksiomer, får man en ny og sterkere teori. Denne teorien skal vi betegne med "HED". Denne teorien kan sikkert modifiseres på mange forskjellige måter. For eksempel synes det ikke umulig å tenke seg at man kan formulere en rekke varianter av den forholdsvis usofistikerte tesen HE5 innenfor rammen av L+.

Når det gjelder HED virker det rimelig å si at denne teorien representerer et hedonistisk, eller hva som egentlig synes å gå ut på det samme, en art handlingsutilitarisme. Det bør imidlertid understrekes at man ikke uten videre kan tilskrive Bentham teorien HED. På den annen side synes det heller ikke urimelig å si at det dreier seg om en teori, muligens noe karikert, som er i Benthams ånd. Det virker også korrekt å påstå at de innvendinger som kan rettes mot teorien HED, og som ikke bare går på rent formelle forhold, i stor utstrekning kan rettes mot hedonistiske teorier av Benthams type. Det omvendte synes også plausibelt: Innvendinger som rammer det vesentlige i Benthams teori synes også, modifisert på passende måte, å representere tungtveiende argumenter mot HED. Når det gjelder innvendinger mot HED kan man nevne nær sagt alle de klassiske argumentene som har blitt fremsatt mot utilitarismen. Vi skal ikke gå detaljert gjennom dem her av plasshensyn. Det bør imidlertid understrekes, slik som antydet ovenfor, at de argumentene som kan rettes mot HED ikke uten videre kan rettes mot KET1. Dette kommer av at den sistnevnte teori tross alt er svakere.

Vi skal nå gå videre og bevise enkelte satser som kan kaste noe lys over verditeorien representert ved HE1 – HE5. Dette har riktignok en helt marginal interesse. Først tar vi for oss den følgende definisjon:

Definisjon 8.3.2

(i) LI(x,y) <–> RelI(1,x,y)
(ii) SI(x,y) <–>. (Bh(x) &Bh(y) & (Ez)(z>1 & RelI(z,x,y))) v
(Bh(x) &Sme(y)) v (Sme(x) &Sme(y) & (Ez)(z<1 &RelI(z,x,y)))
(iii) DD = Mg(x: Bh(x) v Sme(x))
(iv) K;a = Mg(<c, (iz)(RelI(z,c,a))>: Be(c) v Sme(c))

Gitt denne definisjonen kan man lett vise at de følgende påstander holder:

Teorem 8.3.3

(i) LI(x,y) & LI(x,z) –> LI(x,z)
(ii) LI(x,y) –> LI(y,x)
(iii) xêDD –> LI(x,x)

(iv) SI(x,y) & SI(y,x) –> SI(x,z)
(v) xêDD –> ¬(SI(x,x))
(vi) SI(x,y) –> ¬SI(y,x)
(vii) LI(x,y) & SI(x,z) –> SI(y,z)
(viii) LI(x,y) & SI(z,x) –> SI(z,y)
(ix) x,yêDD –> (SI(x,y) v LI(x,y) v SI(y,x))
(x) LI(x,y) –> x,yêDD
(xi) SI(x,y) –> x,yêDD
(xii) Bh(a) & x,yêDD. –> (SI(x,y) <–> K;a(x) > K;a(y))
(xiii) Bh(a) & x,yêDD –> (LI(x,y) <–> K;a(x) = K;a(y))
(xiv) Bh(a) &Bh(b) –>
(Ek)(k>0 &aêReell & (Ax)(xêDD –> K;a(x) = k*K;b(x)))
(xv) (Ez)Bh(z) & x,yêDD. –> (SI(x,y) <–> (Aa)(Bh(a) –> K;a(x)>K;a(y)))
(xvi) (Ez)Bh(z) & x,yêDD. –> (LI(x,y) <–> (Aa)(Bh(a) –> K;a(x) = K;a(y))

Bevis: Ad (i): Anta LI(x,y) og LI(y,z). Fra definisjonen av relasjonen LI fremgår det da at man har RelI(1,x,y) og RelI(1,y,z). Fra dette HE3, punkt (iv) følger RelI(1*1,x,z). Fra dette følger så i kraft av definisjonen av LI at LI(x,z).

Ad (ii): Anta LI(x,y). Fra dette følger per definisjon at RelI(1,x,y). Fra dette og HE3, punkt (iii) har man RelI(1^(-1),y,x). Siden 1= (1^(–1)) impliserer dette RelI(1,y,x) og derfor LI(y,x).

Ad (iii): Anta xêDD. Dette impliserer ved hjelp av den definisjonen vi har gitt at av DD at Bh(x) v Sme(x). Fra dette og HE3, punkt (v), følger at det finnes z slik at RelI(z,x,x). Herav har man i lys av HE3, punkt (vi) at z=1 og derfor at RelI(1,x,x). Det følger at LI(x,x). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): (1) Anta SI(x,y) & SI(y,z). Fra definisjonen av relasjonen SI følger da:
(2.1) (Bh(x) &B(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y))) v
(Bh(x) &Sme(y)) v (Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)))
(2.2) (Bh(y) &B(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,z))) v
(Bh(y) &Sme(z)) v (Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)))
Vi ønsker å vise at SI(x,z). Dette innebærer at man må vise:
(3) (Bh(x) &B(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,z))) v
(Bh(x) &Sme(z)) v (Sme(x) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)))
I lys av (2.1) og (2.2) må man undersøke i alt ni tilfeller og påvise at (3) holder i hvert tilfelle.

Tilfelle 1: Man har Bh(x) &B(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og dessuten at Bh(y) &B(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,z)). Da følger åpenbart Bh(x) & Bh(z). Dessuten finnes c1 og c2 der man har:
RelI(c1,x,y) & RelI(c2,y,z) & c1>1 & c2>1.
Fra dette og HE3, punkt (iv), følger RelI(c1*c2,x,z) & c1*c2>1. Siden Bh(x) & Bh(z) følger det at (3) holder i dette tilfellet.

Tilfelle 2: Bh(x) &B(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) & Bh(y) &Sme(z). Da følger umiddelbart at Bh(x) & Sme(z). Dette impliserer åpenbart (3).

Tilfelle 3: Man har Bh(x) &B(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og dessuten Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)). I dette tilfellet har man også Bh(x) & SMe(z). Dette impliserer åpenbart (3).

Tilfelle 4: Man har at Bh(x) &Sme(y) og
Bh(y) &Bh(z) &(Ec)(c>1 & RelI(c,y,z)).
Dette tilfellet er utelukket siden mengden av mulige smerteopplevelser og mengden av logisk mulige behagsopplevelser ikke har noen felles elementer. Dette følger fra HE3, punkt (xiv).

Tilfelle 5: Man har Bh(x) &Sme(y) & Bh(y) &Sme(z). Også dette tilfellet er utelukket i lys av HE3, (xiv).

Tilfelle 6: I dette tilfellet har man at Bh(x) &Sme(y) og dessuten at: Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)). Det følger da åpenbart at Bh(x) & Sme(z). Fra dette følger så (3) som er det man ønsker.

Tilfelle 7: I dette tilfellet har man at:

(Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y))) og dessuten: Bh(y) &B(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,z)). Det følger umiddelbart fra HE3, (xiv) at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle 8: I dette tilfellet har man at:

(Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y))) og dessuten: Bh(y) &Sme(z). Også dette tilfellet er utelukket i lys av HE3, (xiv).

Tilfelle 9: Man har (Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y))) og dessuten: Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)). Det følger at det finnes c1, c2 der:

c1<1 & c2<1 & RelI(c1,x,y) & RelI(c2,y,z) & Sme(x) & Sme(z). Fra dette har man ved hjelp av HE3,(iv) at RelI(c1*c2,x,z) og derfor, siden c1*c2<0 i dette tilfellet, at Sme(x)& Sme(z) & (Ez)(z<1 & RelI(z,x,z)). Dette impliserer (3).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (iv) i teoremet.

Ad (v): Anta for reduktio ad absurdum at xêDD og at SI(x,x). Fra det siste og definisjonen av SI følger:

(Bh(x) &B(x) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,x))) v
(Bh(x) &Sme(x)) v (Sme(x) &Sme(x) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,x)))

I det første tilfellet har man at det finnes c1 der (1) c1>1 & RelI(c1,x,x). Men siden xêDD har vi RelI(1,x,x). Dette (1) og HE3, (ii) gir oss en motsigelse. I det andre tilfelle har man at Bh(x) & Sme(x). Dette er utelukket i lys av HE3, (xiv). I det siste tilfelle har man at RelI(c2,x,x) for noe c2<1. Men siden xêDD har man RelI(1,x,x) slik at RelI(c2,x,x), for c2<1, er utelukket i lys av HE3, (ii). Man har altså at xêDD & SI(x,x) leder til en motsigelse i alle tilfellene. Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi): Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x,y slik at SI(x,y) & SI(y,x). Fra definisjonen av Si følger da at

(1.1) (Bh(x) &Bh(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y))) v
(Bh(x) &Sme(y)) v (Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)))

(1.2) (Bh(y) &B(x) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,x))) v
(Bh(y) &Sme(x)) v (Sme(y) &Sme(x) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,x)))

Igjen blir det i alt ni tilfelle som man må undersøke og hvor man i hvert tilfelle må vise at det er mulig å utlede en motsigelse.

Tilfelle 1: Man har (Bh(x) &B(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og dessuten Bh(y) &Bh(x) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,x)). I dette tilfelle finnes c1,c2 slik at c1>1 &c2>1 og der man dessuten har at RelI(c1,x,y) & RelI(c2,y,x). Det følger fra dette ved hjelp av HE3, (iv) at RelI(c1*c2,x,x). Nå har man også at c1*c2>1 og derfor c1*c2≠1. På den annen side har man også ved hjelp av HE3 at RelI(1,x,x). Dette, og det at RelI(c1*c2,x,x), gir oss en motsigelse i lys av HE3, (ii).

Tilfelle 2: Man har (Bh(x) &Bh(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og dessuten Bh(y) & Sme(x). Dette strider direkte mot HE3,(xiv).

Tilfelle 3: Man har Bh(x) &Bh(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og dessuten Sme(y) &Bh(x) & (Ec)(c<1 & RelI(c,y,x)). Dette impliserer Bh(y) &Sme(y) som strider mot HE3, (xiv).

Tilfelle 4: Man har Bh(x) &Sme(y) og dessuten at Bh(y) &Bh(x) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,x)). Dette strider direkte mot HE3, (xiv).

Tilfelle 5: Man har Bh(x) &Sme(y) og Bh(y) &Sme(x). Også dette tilfellet er utelukket fordi det strider mot HE3, (xiv)

Tilfelle 6: Bh(x) &Sme(y) og dessuten
Sme(y) &Sme(x) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,x)). Dette impliserer Bh(x) & Sme(x) som strider mot HE3, (xiv).

Tilfelle 7: Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)) og Bh(y) &Bh(x) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,x)). Dette impliserer Sme(x) & Bh(x) som er utelukket i lys av HE3, (xiv).

Tilfelle 8: Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)) og Bh(y) &Sme(x). Dette tilfelle impliserer Sme(y) & Bh(y). Også dette strider mot HE3, (xiv).

Tilfelle 9: Sme(x) &Sme(y) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,y)) og Sme(y) &Sme(x) & (Ec) (c<1 &RelI(c,y,x)). I dette tilfelle har man at det finnes c1,c2<1 slik at RelI(c1,x,y) & RelI(c2,y,x). Fra dette og HE3, (iv) følger RelI(c1*c2,x,x). Men siden c1,c2<1 følger c1*c2<1 og derfor c1*c2≠1. Siden Bh(x) følger at xêDD og derfor at RelI(1,x,x). Dette gir oss en motsigelse.

Man ser at i alle tilfellene kan man utlede en motsigelse. Dette viser at (vi) holder.

Ad (vii): Anta LI(x,y) & SI(x,z). Fra definisjonene av LI og Si følger det da: (1) RelI(1,x,y)

(2) (Bh(x) &Bh(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,z))) v
(Bh(x) &Sme(z)) v (Sme(x) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,z)))

Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(3) (Bh(y) &Bh(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,z))) v
(Bh(y) &Sme(z)) v (Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)))

Vi skiller mellom tre tilfelle:

Tilfelle 1: (4) Bh(x) &Bh(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,z)). Fra Bh(x), (1) og HE3, (xii) følger at (5) Bh(y). Fra (4) følger at det finnes c1 slik at c1>1 &RelI(c1,x,z). Fra dette, (1) og HE3, (iii), (iv) følger RelI(c1,y,z). Det følger derfor at man har:

Bh(y) & Bh(z) & (Ec)(c>1 & RelI(c,y,z)). Fra dette følger (3).

Tilfelle 2: Anta (6) Bh(x) & Sme(z). I lys av (1) og HE3 (iii), (xii) følger herav Bh(y) & Sme(z). Dette impliserer åpenbart (3).

Tilfelle 3: (7) (Sme(x) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,x,z))). Fra (1) har vi i lys av HE3, (iii) at (8) RelI(1,y,x). Dette, (7) og HE3 (iv) impliserer Sme(y). Fra (7) følger også at det finnes c1 der c1<1 &RelI(c1,x,z). Fra dette, (8) og HE3 (iv) kan man slutte at RelI(c1,y,z). Det følger derfor at man har:

Sme(y) &Sme(z) & (Ec)(c<1 &RelI(c,y,z)). Fra dette følger åpenbart (3).

Man ser at (3) følger i alle tilfelle. Man kan derfor konkludere med at SI(y,z). Dette viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii). Denne påstanden bevises på akkurat samme måte som påstand (vii). Vi overlater derfor detaljene til leseren.

Ad (ix): Anta x,yêDD. I lys av definisjonen av DD innebærer dette at (1) x,yêMg(z: Bh(z) v Sme(z)). Fra dette og HE3, (v) følger at det finnes c slik at RelI(c,x,y). Ved HE3 (xiii) følger at c≠0. Også i dette beviset er det naturlig å skille mellom en rekke tilfelle alt ettersom x og y er henholdsvis behagsbetonte opplevelser eller smerteopplevelser. Vi ønsker å vise at følgende holder i alle tilfellene: (2) (SI(x,y) v LI(x,y) v SI(y,x)).

Tilfelle 1: Bh(x) & Bh(y). Siden RelI(c,x,y) har man da ved hjelp av HE3,(ix) at c>0. Er da c=1 følger LI(x,y) og derfor (2). Er c>1 har vi

Bh(x) & Bh(y) & (Ec)(c>1 & RelI(c,x,y)) og derfor SI(x,y). (2) holder derfor. Er endelig c<1 har man at 1/c>1 og videre i lys av HE3 at RelI(1/c,y,x)). Det følger da at Bh(y) & Bh(x) & (Ed)(d>0 & RelI(d,y,x)). Herav har man SI(y,x) og derfor at (2) holder.

Tilfelle 2: Bh(x) & Sme(y). Da har man umiddelbart i lys av definisjonen av SI at SI(x,y). Det følger at (2) holder.

Tilfelle 3: Sme(x) & Bh(y). I så fall følger, igjen ved hjelp av definisjonen av SI, at SI(y,x). I dette tilfelle holder åpenbart (2).

Tilfelle 4: Sme(x) & Sme(y). Nå har vi RelI(c,x,y) & c≠ø. Det følger derfor ved hjelp av HE3, (viii) at c>0. Er da c>1 har vi at (1/c)<1 og videre at RelI((1/c),y,x). Fra dette, Sme(y) & Sme(x) følger ved hjelp av definisjonen av SI at SI(y,x). I dette tilfelle holder (2). Er c=1 har vi at LI(x,y) og derfor at (2) holder. Er endelig c<1 følger ved hjelp av definisjonen av SI at SI(x,y). I så fall holder selvfølgelig (2).

Man ser at (2) holder i alle tilfelle. Dette viser at påstand (ix) holder.

Ad (x) og (xi): Når det gjelder (x) følger den ved hjelp av HE3, (v) og definisjonen av DD. (xi) følger temmelig umiddelbart fra definisjonen av SI og definisjonen av DD.

Ad (xii): Anta (1) Bh(a) & SI(x,y) & x,yêDD. Fra dette og definisjonen av relasjonen SI følger:

(2) (Bh(x) &Bh(y) & (Ez)(z>1 & RelI(z,x,y))) v
(Bh(x) &Sme(y)) v (Sme(x) &Sme(y) & (Ez)(z<1 &RelI(z,x,y)))

Vi ønsker å vise: (3) K;a(x) > K;a(y) dvs. i lys av definisjonen avK;a:

(4) (iz)RelI(z,x,a)> (iz)RelI(z,y,a)

I lys av (2) er det nødvendig å skille mellom tre tilfelle:

Tilfelle 1: (5) Bh(x) &Bh(y) & (Ez)(z>1 & RelI(z,x,y)). Siden Bh(x) &Bh(y) og vi dessuten har at Bh(a) følger ved hjelp av HE3 at det finnes entydig bestemte reelle tall c1 og c2 slik at (6) RelI(c1,x,a) & RelI(c2,y,a). Fra (5) følger eksistensen av z der man har: (7) z>1 & RelI(z,x,y). Man har fra (6) og HE3, (iii), (iv) at RelI(c1*(1/c2),x,y). Dette, (7) og HE3, (ii) impliserer z = c1*(1/c2)>1. Fra dette kan man slutte at c1>c2 og derfor ved hjelp av (6) og HE3, (ii) at (4) holder. Dette viser at (4) holder i dette tilfellet.

Tilfelle 2: Bh(x) & Sme(y). Det følger også i dette tilfellet at det finnes entydig bestemte reelle tall c1 og c2 slik at (8) RelI(c1,x,a) & RelI(c2,y,a). Fra den første konjunkten her og HE3, (ix) følger at (9) c1>0 siden det forutsettes at Bh(a). Fra den andre konjunkten i (8) og HE3, (iii) følger RelI(1/c2,a,y). Fra dette samt det at Bh(a) & Sme(y) følger ved hjelp av HE3, (viii) at (10) (1/c2)<0. Dette impliserer c2<0 som sammen med (9) gir: c1>c2. Fra dette og (8) følger så (4).

Tilfelle 3: Man har (10) Sme(x) & Sme(y) & (Ez)(z<1 &RelI(z,x,y)). Siden det forutsettes at Bh(a) har man, som i de foregående tilfellene, at det finnes entydig bestemte reelle tall c1 og c2 der (11) RelI(c1,x,a) & RelI(c2,y,a). Fra dette og HE3, (iii) og (iv), Følger (12) RelI(c1*(1/c2),x,y). Fra (10) følger:
RelI(z,x,y) & z<1. I lys av (12) har man derfor (c1*(1/c2)) <1. Fra (11), HE3, (iii) og (vii), følger (1/c1)<0 og (1/c2)<0. Dette impliserer c1,c2<0. Det følger at c1> c2 og derfor at (4) holder.

Vi har nå vist i alle tilfelle at (4), og derfor (3), holder gitt (1) og (2). Vi har med andre ord vist at Bh(a) & x,yêDD. –> (SI(x,y) –> K;a(x)> K;a(y)). Det er imidlertid også nødvendig å vise Bh(a) & K;a(x)> K;a(y) & x,yêDD. –> SI(x,y).

Anta derfor (13) Bh(a) & x,yêDD & K;a(x)> K;a(y). Vi ønsker å vise at

(14) (Bh(x) &Bh(y) & (Ez)(z>1 & RelI(z,x,y))) v
(Bh(x) &Sme(y)) v (Sme(x) &Sme(y) & (Ez)(z<1 &RelI(z,x,y)))

Fra (13), HE3 og definisjonen av K;a har vi at det finnes entydig bestemte reelle tall slik at c1, c2 slik at (15) c1> c2 & RelI(c1,x,a) & RelI(c2,y,a). Siden x,yêDD har man x,yêMg(b: Bh(b) & Sme(b)). Det følger at man må sondre mellom fire tilfelle:

Tilfelle 1: Bh(x) & Bh(y). Fra (15) følger (16) RelI(c1*(1/c2),x,y)). Videre har man fra (15) og HE3, (ix) at c1,c2>0 siden Bh(a) & Bh(x) & Bh(y). Siden man derfor har

c1>c2>0 følger at c1/c2 >1 og følgelig at

Bh(x) & Bh(y) & (Ez)(z>1 & RelI(z,x,y)). Fra dette følger så (14) og derfor SI(x,y).

Tilfelle 2: Bh(x) & Sme(y). I dette tilfellet har man umiddelbart at (14) holder.

Tilfelle 3: Sme(x) & Bh(y). Fra dette, (15) og HE3, (viii) og (ix), følger c2>0 og c1<0. Men da c1>c2 som strider mot (15). Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle 4: Sme(x) & Sme(y). Man kan i så fall slutte fra (15) og HE3, (viii),(ix) at c1,c2<0. Videre følger fra (15) og HE3(4) at RelI(c1*(1/c2),x,y). Det følger siden c1>c2 at c1*(1/c2) <1. Man har derfor i dette tilfellet:

Sme(x) & Sme(y) & (Ez)(z<1 & RelI(z,x,y)). Fra dette følger (14).

Vi har nå vist at Bh(a) & x,yêDD & K;a(x)>K;a(y). –> SI(x,y). Dette viser at punkt (xii) i satsen ovenfor holder.

Ad (xiii): Anta Bh(a) & x,yêDD & LI(x,y). Fra definisjonen av LI følger da (1) RelI(1,x,y). Videre har vi i lys av HE3, (i) og (ii) at det finnes entydig bestemte relle tall c1,c2 slik at (2) RelI(c1,x,a) & RelI(c2,y,a)). Fra dette og HE3, (iii) og (iv), følger RelI(c1/c2, x,y) og derfor i lys av (1) at (3) c1/c2=1. Fra dette følger c1=c2 og derfor at (iz)RelI(z,x,a) = (iz)RelI(z,y,a). Herav følger ved hjelp av definisjonen av K;a at K;a(x) = K;a(y). Anta på den annen side at Bh(a) & K;a(x)=K;a(y) & x,yêDD. Fra definisjonen av K;a følger da (iz)RelI(z,x,a) = (iz)RelI(z,y,a). Dette innebærer i lys av HE3 at det finnes et reellt tall c≠0 slik at RelI(c,x,a) & RelI(c,y,a). Fra dette og HE3 (iii),(iv) kan man slutte RelI(c/c,x,y), dvs. at RelI(1,x,y). Herav: LI(x,y).

Ad (xiv): Fra forutsetningene og HE3 følger at det finnes reelle tall et reelt tall k slik at (1) RelI(k,a,b). Siden Bh(a) og Bh(b) må man da ha at k>0 og følgelig (1/k)>0. Anta xêDD. Det følger at det finnes c1, c2 slik at (2) RelI(c1,x,a) og RelI(c2,x,b). Fra (1) har man at RelI(1/k,b,a). Fra dette og (2) følger ved hjelp av HE3, (iv) at RelI((1/k)*c2,x,a). Man har derfor c1= (1/k)*c2. Men da:

K;a(x) = (iz)RelI(z,x,a) = c1= (1/k)*c2 = (1/k)*(iz)RelI(z,x,b) = (1/k)*K;b(x). Dette viser at påstanden holder.

Ad (xv): Anta (1) (Ez)Bh(z) & x,yêDD &SI(x,y). Vi ønsker å vise:

(2) (Aa)(Bh(a) –> K;a(x)>K;a(y)). Fra (1) følger at det finnes b slik at (3) Bh(b). Anta for vilkårlig a at (4) Bh(a). Fra dette og (3) følger det at det finnes k slik at (5) k>0 & (Ax) (xêDD –> K;a(x)= k* K;b(x)). Vi må derfor kunne slutte:

(6) K;a(x)= k*K;b(x) & K;a(y) =k*K;b(y).

Fra (1) og (3) og punkt (xii) følger K;b(x) > K;b(y). Siden k>0 følger fra dette og (6) det vi ønsker, nemlig: K;a(x) > K;a(y). Dette viser at (2) holder.

Anta på den annen side:

(7) (Ez)Bh(z) & x,yêDD & (Aa)(Bh(a) –> K;a(x)>K;a(y))

Det følger at det finnes b slik at Bh(b). Fra dette og (7) følger K;b(x)>K;b(y). Men siden x,yêDD følger fra dette ved hjelp av (xii) at SI(x,y).

Ad (xvi): Anta (1) (Ez)Bh(z) & x,yêDD &LI(x,y). Vi ønsker å vise:

(2) (Aa)(Bh(a) –> K;a(x) = K;a(y)). Fra (1) følger at det finnes b slik at (3) Bh(b). Anta for vilkårlig a at (4) Bh(a). Fra dette og (3) følger det at det finnes k slik at (5) k>0 & (Ax) (xêDD –> K;a(x)= k* K;b(x)). Vi må derfor kunne slutte:

(6) K;a(x)= k*K;b(x) & K;a(y) =k*K;b(y).

Fra (1) og (3) og punkt (xiii) følger K;b(x) = K;b(y). Siden k>0 følger fra dette og (6) det vi ønsker, nemlig: K;a(x) = K;a(y). Dette viser at (2) holder.

Anta på den annen side:

(7) (Ez)Bh(z) & x,yêDD & (Aa)(Bh(a) –> K;a(x) = K;a(y))

Det følger at det finnes b slik at Bh(b). Fra dette og (7) følger K;b(x) = K;b(y). Men siden x,yêDD følger fra dette ved hjelp av (xiii) at SI(x,y).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 8.3.3. **Q.E.D.**

Teorem 8.3.4 Anta:

(i) x= μ;-1(Mg(w: Oppl;w(r,b,t1,t2))) & μ(x)≠ø
(ii) y= μ;-1(Mg(w: Oppl;w(r,c,t'1,t'2))) & μ(x)≠ø
(iii) Bh(a) & Bh(b) & Sme(c)
(iv) d(t1,t2) = p
(v) d(t'1,t'2) = q &p>q>0
(vi) RelI(z1,b,a) & RelI(z2,c,a)

Da gjelder:

(a) H*;a(x)> H*;a(y)
(b) Sv(x,y)

Bevis: Ad (a): Fra forutsetningene (i) – (iii) følger:

(1) <r,b,t1,t>êDP og at <r,c,t'1,t'2>êDP Fra dette, forutsetning (i) –(iii) og definisjonen av F kan man slutte:

(2) F;-1(x) = <r,b,t1,t2> & F;-1(y) = <r,c,t'1,t'2>

Fra dette og definisjonen av H;a følger:

(3.1) H;a(x) = Q;a(<r,b,t1,t2>) = (iz)RelI(z,b,a)*d(t1,t2)
(3.2) H;a(y) = Q;a(<r,c,t'1,t'2>) = (iz)RelI(z,c,a)*d(t'1,t'2)

Fra dette og forutsetning (iv) – (vi) følger:

(4) H;a(x) = z1*p & H;a(y) = z2*q.

Fra forutsetning (iii), (vi) og HE3 følger at z2<0. Men fra dette, det at p>q>0 og (4) følger: (5) H:a(x)>H;a(y). Siden x,yêF"DP har man (5) og definisjonen av H* at H*;a(x) > H*;a(y).

Ad (b): Man har per definisjon i lys av tidligere teoremer at

(6) Sv(x,y) <–> (Ef)(VE(f) & f(x)>f(y)). Fra det som er vist under punkt (a) har man at (7) H*;a(x) > H*;a(y). Fra forutsetning (iii) og HE5 følger VE(H*;a). Dette, (6) og (7) impliserer at Sv(x,y). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 8.3.5 Anta Bh(a) & Bh(b) & RelI(z,a,b). Da gjelder:

(Ax)(xêU –> H*;b(x) = z* H*;a(x))

Bevis: Fra definisjonen av H*;a følger:

(1) H*;a = H;aU Mg(<x,0>: xê(U–F"DP))
(2) H*;b = H;bU Mg(<x,0>: xê(U–F"DP))

Anta for vilkårlig x at xêU. Det er da to muligheter.

Tilfelle (i): xê(U–F"Dp). Da følger fra (1) og (2) at H*;a(x) =0 og at H*;b(x) =0. Det følger at H*;a(x) = z* H*;b(x).

Tilfelle (ii): xêF"DP. Da har man per definisjon at

xêMg(z: (Ey)(<y,z>êF & yêDP)). Fra dette følger det finnes y der <y,x>êF & yêDP. Fra det at yêDP har man at det finnes r,s,t1,t2 og w slik at

y = <r,s,t1,t2> & (Bh(s)vSme(s)) & Oppl;w(r,s,t). Fra definisjonen av F følger da at F;-1(x)= <r,s,t1,t2>. Fra dette og definisjonen av H;a(x) følger at

(3) H;a(x) = Q;a(<r,s,t1,t2>) = (iz)RelI(z,s,a)*d(t1,t2). På tilsvarende vis ser man at

(4) H;b(x) = Q;b(<r,s,t1,t2>) = (iz)RelI(z,s,b)*d(t1,t2).

Nå har man at det finnes z1, z2 slik at (5) RelI(z1,s,a) & RelI(z2,s,b). Fra dette, (3) og (4) følger: (6) H;a(x) = z1*d(t1,t2) & H;b(x)= z2*d(t1,t2). Fra (5) følger ved hjelp av HE3 at

RelI(1/z1,a,s). Fra dette og den andre konjunkten i (5) følger ved hjelp av HE3 at RelI((1/z1)*z2, a,b). Fra dette, forutsetningen om at Rel(z,a,b) og HE3 følger z= (1/z1)*z2. Fra dette har man z2 = z*z1. Fra dette og (6) følger det man ønsker, nemlig at:

H*;b(x) = H;b(x) = z*z1*d(t1,t2) = z* H;a(x) = z*H*;b(x). **Q.E.D.**

§9 Om muligheten av å definere forventet verdi.

I teorien KET1 ble de følgende predikater innført som primitive, det vil si udefinerte ikke-logiske predikater:

(12) "z er vekten til klassen y av mulige konsekvenser som kan inntreffe om x realiserer handlingsalternativet h ved tidspunktet t i verdenen w relativt til verdifunksjonen f " – "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)"
(13) "z er den forventede verdi relativt til verdifunksjonen f som handlingsalternativet h har for x ved tidspunktet t i verdenen w" – "Forv;(x,t,w)(z,h,f)"

Man kan nå spørre om ikke disse predikatene kan defineres ved hjelp av de andre predikatene som inngår i språket til KET1. I dette avsnittet skal vi presentere en tentativ definisjon av begrepet forventet verdi. Vi skal altså i hovedtrekkene vise hvordan predikatet (13) ovenfor kan defineres. Dernest vil vi i de etterfølgende paragrafer generalisere dette begrepet noe og vise en rekke satser om det.

La oss aller først peke på at vi definerer uttrykket "K;(x,t,w)(h)" ved:

Definisjon 9.1 K;(x,t,w)(h) = Mg(k: Kon;<x,h,w,t>(k))

Det følger fra denne definisjonen at K;(x,t,w)(h) er mengden av alle de utsagn som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe om personen x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h i verdenen w. Man kan her også foreslå å lese uttrykket "K;(x,t,w)(h)" slik "Klassen av mulige konsekvenser til handlingsalternativet h reltivt til triplet <x,t,w>". Vi skal foretrekke denne lesemåten.

I dette avsnittet finner vi det også hensiktsmessig å innføre uttrykket "sannsynligheten for den mulige konsekvensen k gitt at x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer handlingsalternativet h". Vi skal forkorte dette med "P;(x,t,w,h)(k)". Uttrykket er formelt definert slik:

Definisjon 9.2 P;(x,t,w,h)(k) = (iz)(Pr;<x,h,w,t>(z,k))

Ser man tilbake på listen over primitive predikater i språket til teorien KET 1 skulle denne definisjonen være nærmest selvforklarende.

I det følgende spiller parametrene t,x, og w en helt underordnet rolle siden vi skal tenke oss at vi betrakter en fiksert person x ved et gitt tidspunkt t i en bestemt verden w og bare skal betrakte de mulige konsekvensene som kan inntreffe om x ved t i denne verdenen w realiserer alternativet h.

Vi tar nå sikte på å gi en definisjon av uttrykket "summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i

forhold til sin sannsynlighet ".

La oss først starte med et enkelt tilfelle. Anta K;(x,t,w)(h) bare inneholder et endelig antall elementer, la oss kalle dem k;0,....,k;n. Da vil summen av verdiene til disse mulige konsekvensene relativt til verdifunksjonen v være ∑/j,0,n/(v(k;j)). Men siden vi skal summere sammen verdiene relativt til v av de diverse k'ene redusert i forhold til sin sannsynlighet om x ved t i verdenen w realiserer handlingsalternativet h må vi her, istedet for de enkelte ledd v(k;j) betrakte P;(x,t,w,h)(k;j)*v(k;j). I det tilfelle at K;(x,t,w)(h) er endelig og bare inneholder k;0,...,k;n er det derfor naturlig, – og det ville fortone seg svært besynderlig om man ikke gikk med på dette –, å definere uttrykket "summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet " ved:
∑/j,0,n/(P;(x,t,w,h)(k;j)*v(k;j)).

Hva nå hvis K;(x,t,w)(h) ikke er endelig? Det ville være unaturlig å hevde at ethvert handlingsalternativ bare har et endelig antall konsekvenser. Vi må derfor betrakte de tilfellene der K;(x,t,w)(h) er en tellbart, eventuelt overtellbart. uendelig mengde.

A La oss først kalle klassen av alle de elementene i K;(x,t,w)(h) der produktet av sannsynlighet og verdi relativt til verdifunksjonen v er større enn null for K+;(x,t,w)(v,h). Vi kan definere dette begrepet slik:

Definisjon 9.3 K+;(x,t,w)(v,h) = Mg(y: yêK;(x,t,w)(h) & v(y)* p;(x,t,w,h)(y) >0)

Tilsvarende definerer vi "K–;(x,t,w)(h)" ved:

Definisjon 9.4 K–;(x,t,w)(v,h) = Mg(y: yêK;(x,t,w)(h) & v(y)* p;(x,t,w,h)(y) <0)

K–;(x,t,w)(h) er da mengden av alle de elementene i K;(x,t,w)(h) hvor produktet av verdi og sannsynlighet er negativt.

La oss nå først anta at K;(x,t,w)(h) er tellbart uendelig. Dette innebærer at:

(1) Cd(K;(x,t,w((h)) = Aleph;0

Det er da to muligheter angående K+;(x,t,w)(v,h). Den kan være endelig eller den kan være tellbart uendelig. I denne forbindelse bør det nevnes at vi regner den tomme mengden som en endelig mengde. To tilsvarende muligheter består for K–;(x,t,w)(v,h). Også denne kan være endelig eller tellbart uendelig. I alt er det derfor fire muligheter man må ta i betraktning. La oss se på dem:

(1.1) K+;(x,t,w)(v,h) og K–;(x,t,w)(v,h) er begge endelige.

Da har vi at at K+;(x,t,w)(v,h) = {a;0,....,a;n} for et eller annet naturlig tall n og at K–;(x,t,w) = {b;0,...,b;m} for et eller annet mêNat. I dette tilfellet ville det være naturlig å la summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet være:

∑/k,0,n/(v(a;k)* p;(x,t,w,h)(a;k)) + ∑/k,0,m/(v(b;k)* p;(x,t,w,h)(b;k))

I dette tilfellet synes det altså ikke å være noen spesielle problemer. Det bør bemerkes at vi ikke uten videre har at de to mengdene K+;(x,t,w)(v,h) og K–;(x,t,w)(v,h),som åpenbart er disjunkte, nødvendigvis uttømmer K;(x,t,w)(h). Den muligheten er åpen at K;(x,t,w)(h) kan inneholde en rekke elementer, endelig mange såvel

som uendelig mange, der produktet av verdi og sannsynlighet er lik null. Disse elementene vil naturligvis ikke høre med i hverken K+;(x,t,w)(v,h) eller K–;(x,t,w)(v,h). De vil heller ikke ha noen vekt ved valget av handlingsalternativet h og bør derfor ikke tas hensyn til ved vurderingen av den forventede verdi.

(1.2) K+;(x,t,w)(v,h) er tellbart uendelig og K–;(x,t,w)(v,h) er endelig.

Da har vi at K;-(x,t,w)(v,h) = {b;0,..., b;m} for noe mêNat og vi har dessuten at det finnes en s: Nat –(1-1,på)–> K+:(x,t,w)(v,h). Det er da to muligheter når det gjelder K+:(x,t,w)(v,h):

(i) Det kan være at rekken ∑/j,0,n/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) ikke konvergerer, mao. at den er divergent. I dette tilfelle virker det naturlig å si at summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet ikke eksisterer. (ii) I motsatt fall, om rekken konvergerer, dvs. om det finnes et reelt tall a slik at a = ∑/j,0,∞/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) vil det være naturlig å la den nevnte sum være:

∑/j,0,∞/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) + ∑/k,0,m/(v(b;k)* p;(x,t,w,h)(b;k))

La oss se på det tilfellet der:

(1.3) K+;(x,t,w)(v,h) er endelig og K–;(x,t,w)(v,h) er tellbart uendelig.

Dette tilfellet blir helt analogt med det forrige. Vi vil ha at K+;(x,t,w)(v,h) = {a;0,...,a;n} for noe n og at det finnes en s slik at s: Nat –(1-1,på)–> K–:(x,t,w)(v,h). Konvergerer ikke rekken ∑/j,0,n/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) er det nærliggende å si at den forvendtede verdi til h ikke eksisterer. I motsatt fall virker det nærliggende å sette summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet lik:

∑/j,0,∞/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) + ∑/k,0,n/(v(a;k)* p;(x,t,w,h)(a;k))

La oss se på det siste tilfellet:

(1.4) K+;(x,t,w)(v,h) er tellbart endelig og K–;(x,t,w)(v,h) er tellbart uendelig.

I så fall vil det finnes opptellinger s,t av henholdsvis K+;(x,t,w)(v,h) og K–;(x,t,w)(v,h). Har man da at såvel rekken ∑/j,0,n/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) som rekken ∑/j,0,n/(v(t(j))*p;(x,t,w,h)(t;j)) konvergerer synes det rimelig å sette summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet lik:

∑/j,0,∞/(v(s(j))*p;(x,t,w,h)(s;j)) + ∑/j,0,∞/(v(t(j))*p;(x,t,w,h)(t;j))

Er en eller begge av de to nevnte rekker divergente synes det rimelig å la den nevnte sum være udefinert.

Vi har dermed sett på alle mulige tilfeller når K;(x,t,w)(h) er tellbart uendelig.

Anta kêK;(x,t,w)(h). Da kaller vi produktet av verdien til k relativt til den etiske verdifunksjonen v og sannsynligheten for k gitt at x ved tidspunktet t i verdenen w realiserer

handlingsalternativet h for momentet til k relativt til v og tuplet <x,t,w,h>. Man ser, om man innfører denne terminologien, at K+:(x,t,w)(v,h) er alle de elementene i K;(x,t,w)(h) som har positivt moment og at K;–(x.t.w)(v,h) er alle de elementene i K;(x,t,w)(h) som har negativt moment. Sammenfattende kan man derfor si om K;(x,t,w)(h) er tellbar at totalsummen til denne mengden er summen av momentene til alle de elementene som har positivt moment pluss summen av momentene til alle de elementer i K;(x,t,h) som har negativt moment såsant disse summene eksisterer. I motsatt fall er totalsummen udefinert.

B Vi må imidlertid betrakte det tilfellet der K;(x,t,w)(h) er overtellbar. Forutsettes dette vil de tilfellene angående kardinaltallet til K+:(x,t,w)(v,h) og K–;(x,t,w)(v,h) som vi betraktet ovenfor fremdeles være åpne. Mao. må man også nå betrakte de tilfellene der disse mengdene begge er endelige, der begge er tellbart uendelige og der den ene er endelig og den andre er tellbart uendelig. I alle disse fire tilfellene vil klassen av alle de k som er med i K;(x,t,w)(h) og som har moment lik 0 være overtellbar og det synes derfor i disse tilfellene ikke å være noen grunn til å definere totalsummen til K;(x,t,w)(h) på noen annen måte enn den som ble angitt ovenfor. Men det er nå, når det antas at K;(x,t,w)(h) er overtellbar, ytterligere tre tilfelle som må tas i betraktning: (a) Det tilfellet at K+;(x,t,v)(v,h) og K–;(x,t,w)(v,h) begge er overtellbare. (b) Det tilfellet der K+;(x,t,v)(v,h) er overtellbar mens K–;(x,t,w)(v,h) ikke er det. (c) Det tilfellet der K–;(x,t,v)(v,h) er overtellbar mens K+;(x,t,w)(v,h) ikke er det.

Hvordan skal vi definere summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet i disse tilfellene? Dette virker opplagt mer problematisk. Fra en matematisk synsvinkel er situasjonen tilsynelatende denne: Man har en overtellbar mengde X og en funksjon f som avbilder X inn i klassen av de reelle tall som er større enn 0. Hva skal man da mene med summen av de diverse f(x) ettersom x gjennomløper X? Umiddelbart virker situajonen aldeles meningsløs. Det synes i tilfeller av denne typen svært vanskelig å gi noen generell definisjon av hva som menes med sum. Den mest nærliggende mulighet synes derfor å være at man i de tilfelle hvor K;(x,t,w)(h) er overtellbar og et eller annet av tilfellene (a) – (c) forligger rett og slett ser på totalsummen til K;(x,t,w)(h) som udefinert, dvs. anse den som ikke-eksisterende. I så fall vil vi ha fastsatt betydningen til "summen av den indre etiske verdi til konsekvensene i klassen K;(x,t,w)(h) i forhold til den etiske verdifunksjonen v og redusert i forhold til sin sannsynlighet" i alle tilfelle. I den neste paragrafen skal vi gi en helt generell og formalisert definisjon av dette begrep.

§9.1 En generell formalisert definisjon av forventet verdi.

I denne paragrafen skal vi gi en abstrakt og generell matematisk formulering av det begrepet forventet verdi som ble innført i den forrige paragrafen.

Anta X er en vilkårlig ikke-tom mengde og at f;1 og f;2 er to funksjoner som oppfyller de følgende krav:

(i) X Inkl Dom(f;1) & X Inkl Dom(f;2)

(ii) Rgn(f;1) Inkl Reell & Rgn(f;2) Inkl Reell

Da defineres hva som menes med "den positive delen av X med hensyn på f;1 og f;2", i symboler "pD(X,f;1,f;2)" ved:

Definisjon 9.1.1 pD(X,f;1,f;2) = Mg(y: yêX & f;1(y)*f;2(y) >0)

På tilvarende vis defineres hva som menes med "den negative delen av X med hensyn på f;1 og f;2", i symboler "nD(X,f;1,f;2)" ved:

Definisjon 9.1.2 nD(X,f;1,f;2) = Mg(y: yêX & f;1(y)*f;2(y) <0)

Vi definerer så "den positive sum over X med hensyn på f;1 og f;2", i symboler "S+ (X,f;1,f;2)" ved den følgende nokså kompliserte definisjon:

Definisjon 9.1.3 S+(X,f;1,f;2) er per definisjon det reelle tallet a som oppfyller ett av de følgende krav:

(i) (pD(X,f;1,f;2) =ø & a=0)

(ii) (En)(nêNat &(Es)(s: n–(1-1,på) –>pD(X,f;1,f;2)) & n≥1 &
a = ∑/k,0,n–1/(f;1(s(k))*f;2(s;k))))

(iii) (Es)(s: Nat –(1-1,på)–> pD(X,f;1,f;2) &
(Ah)(h: Nat –(1-1,på)–> pD(X,f;1,f;2) –>
a = ∑/j,0,∞/(f;1(h(j))*f;2(h(j)))))

Man ser fra denne definisjonen at hvis den positive delen av X med hensyn på f;1 og f;2 er overtellbar så eksisterer ikke S+(X,f;1,f;2). På en helt analog måte defineres "den negative sum over X med hensyn på f;1 og f;2", i symboler
"S÷(X,f;1,f;2)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.1.4 S÷(X,f;1,f;2) er per definisjon det reelle tallet a som oppfyller ett av de følgende krav:

(i) (nD(X,f;1,f;2) =ø & a=0)

(ii) (En)(nêNat &(Es)(s: n–(1-1,på) –>nD(X,f;1,f;2)) & n≥1 &
a = ∑/k,0,n-1/(f;1(s(k))*f;2(s;k))))

(iii) (Es)(s: Nat –(1-1,på)–> nD(X,f;1,f;2) &
(Ah)(h: Nat –(1-1,på)–> nD(X,f;1,f;2) –>
a = ∑/j,0,∞/(f;1(h(j))*f;2(h(j)))))])

Tilslutt defineres så uttrykket "Den totale sum til X med hensyn på f;1 og f;2", i symboler "S(X,f;1,f;2)" ved:

Definisjon 9.1.5 S(X,f;1,f;2) = S+(X.f;1,f;2) + S÷(X,f;1,f;2)

Det er underforstått i forbindelse med denne definisjonen at dersom S+(X,f;1,f;2) eller S÷(X,f;1,f;2) ikke eksisterer så eksisterer heller ikke S(X,f;1,f;2). Man ser også at S+ (X,f;1,f;2) ikke eksisterer om pD(X,f;1,f;2) er overtellbar. Den eksisterer heller ikke om pD(X,f;1,f;2) er tellbart uendelig og det finnes en

s: Nat –(1-1,på)–>pD(X,f;1,f;2)

der rekken ∑/j,0,n/(f;1(h(j))*f;2(h(j))) er divergent. Tilsvarende kommentarer kan fremsettes om man istedet for S+(X,f;1,f;2) betrakter S÷(X,f;1,f;2).

Fra definisjonene ovenfor kan man nokså lett utlede den følgende sats som vi ikke gir bevis for:

Teorem 9.1.6 Anta X er en vilkårlig ikke-tom mengde og at f;1 og f;2 er to funksjoner som oppfyller de følgende krav:

(i) X Inkl Dom(f;1) & X Inkl Dom(f;2)

(ii) Rgn(f;1) Inkl Reell & Rgn(f;2) Inkl [0,1]

Da gjelder:

(a) (Ey)(y= S+(X,f;1,f;2)) –> S+(X,f;1,f;2)≥0
(b) (Ey)(y = S+(X,f;1,f;2) & pD(X,f;1,f;2)≠ø –> S+(X,f;1,f;2)>0
(c) (Ey)(y= S÷(X,f;1,f;2)) –> S÷(X,f;1,f;2)≥0
(d) (Ey)(y = S÷(X,f;1,f;2) & nD(X,f;1,f;2)≠ø –> S÷(X,f;1,f;2)<0

§10 Noen elementære satser om reelle tallfølger og rekker.

I det følgende skal vi gjøre rede for noen elementære begreper og satser om reelle tallfølger og rekker som vi har bruk for ved utviklingen av den teorien om forventet verdi som vi har presentert ovenfor. Først vil vi definere hva som menes med en reell tallfølge. Dernest følger definisjoner av innholdet til begrepene 'konvergent tallfølge' og 'divergent tallfølge'. Vi definerer så hva som menes med grenseverdien til den reelle tallfølgen f(n) ettersom n går mot uendelig.

Når så disse tingene er unnagjort presenterer vi den vanlige definisjonen av en rekke og hva som menes med grenseverdien til en rekke r(n) når n går mot uendelig. Siden rekker er en underklasse av tallfølger følger det at man uten videre kan snakke om konvergente og divergente rekker.

Tilslutt presenterer vi en rekke setninger om reelle tallfølger og rekker. Disse satsene gis det ikke bevis for her. Grunnen er den at man kan finne frem til bevisene i en hvilken som helst lærebok i matematisk analyse.

Vi definerer først hva som menes med en reell tallfølge. En reell tallfølge er en hvilken som helst funksjon som avbilder klassen av de naturlige tall, null inkludert, inn i mengden av de reelle tall. Siden "Nat" betegner mengden av de naturlige tall og "Reell" betegner klassen av de reelle tall kan definisjonen formuleres på den følgende måte:

Definisjon 10.1 Rf(x) <–> (x: Nat –> Reell)

Med en konvergent tallfølge x mener vi nå en tallfølge som er slik at det finnes et reellt tall c som er slik at hvis e er et vilkårlig gitt positivt reellt tall så kan man alltid finne et naturlig tall n;0 om er slik at f(n) ligger i intervallet <c–e,c+e> for alle naturlige tall n som er større enn n. Bruker man "CRf(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en konvergent tallfølge" kan definisjonen vi nå har gitt – og som er formulert i hverdagsspråket – formaliseres slik:

Definisjon 10.2 CRf(x) <–>
Rf(x) &(Ec)(cêReell & (Ae)(eêReell & e>0 –>
(En;0)(n:0êNat & (An)(nêNat &n>n;0 –> f(n) ê<c-e,c+e>))))

Det er naturligvis absolutt intet nytt ved denne definisjonen av konvergent tallfølge. Det dreier seg om den vel bekjente Weierstrass- Bolzano - definisjon. Grenseverdien til den relle tallfølgen x(n) ettersom n går mot uendelig, i symboler "Lim/n,∞/(x(n))" er det tallet som som x konvergerer mot om denne tallfølgen konvergerer mot et eller annet tall, ellers finnes ikke denne størrelsen:

Definisjon 10.3 Lim/n,∞/(x(n)) <–>

(ic)[Rf(x) & cêReell & (Ae)(eêReell & e>0 –>
(En;0)(n:0êNat & (An)(nêNat &n>n;0 –> f(n) ê<c–e,c+e>)))]

En divergent tallfølge er ganske enkelt en reell tallfølge som ikke er konvergent. Brukes "DivRf(x)" som forkortelse for "x er en divergent tallfølge" kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 10.4 DivRf(x) <–> [Rf(x) & ¬CRf(x)]

Er x en reell tallfølge defineres "∑/n,k,j/(x(n))", summen av de diverse f(n) ettersom n gjennomløper rekken av de naturlige tall fra k til j, ved den følgende induktive definisjon:

Definisjon 10.5 (a) ∑/n,k,k/(x(n)) = x(k)
(b) ∑/n,k,j+1/(x(n)) = ∑/n,k,j/(f(n)) + f(j+1) om j≥k

Er nå x en reell tallfølge vil også y definert ved y(n) = ∑/j,0,n/(x(j)) være en reell tallfølge om nêN. Det vil i så fall være naturlig å definere den uendelige summen ∑/j,0,∞/(x(j)) som grenseverdien til y(n) når n går mot uendelig, mao. som Lim/n,∞/(y(n)), når y er definert som vi nettopp har nevnt. Dette er motivet bak den følgende definisjon:

Definisjon 10.6 ∑/n,0,∞/(f(n)) = Lim/n,∞/(∑/j,0,n/(f(j)))

Helt tilslutt definerer vi hva som menes at tallet a er grenseverdien til den reelle tallfølgen f. I det følgende brukes "Gr(a,f)" som forkortelse for uttrykket "a er grenseverdien til den reelle tallfølgen f". Definisjonen er som følger:

Definisjon 10.7 Gr(a,f) <–> aêReell & (Ae)(eêReell & e>0 –>
(En;0)(n:0êNat & (An)(nêNat &n>n;0 –> f(n) ê<a–e,a+e>)))

Etter at vi nå har definert de viktigste begrepsdannelsene vi trenger skal vi formulere endel satser som forsåvidt er av en elementær karakter, men som vi har bruk for i vårt arbeid. Disse satsene har naturligvis ikke noe nytt over seg. Bevis for dem foreligger, som allerede nevnt, i alle vanlige standardverk som gir en allsidig innføring i den matematiske analyse. Vi gir satsene uten bevis.

Den første satsen sier at dersom en reel tallfølge har en grenseverdi har den ene og bare en slik grenseverdi:

Teorem 10.1 Rf(x) & (Ea)(Gr(a,x)) –> (E!a)(Gr(a,f))

Fra denne satsen og definisjonene 10.2 og 10.3 kan man utlede den følgende sats som sier at x er en konvergent tallfølge hvis og bare hvis det finnes noe y som er grenseverdien til x(n) når n går mot uendelig:

Teorem 10.2 CRf(x) <–> (Ey)(y = Lim/n,∞/(x(n)))

En reell tallfølge f kalles for monotont stigende om man har at f(n+1)≥f(n) for alle n i domenet til f. En øvre grense for en tallfølge er et reellt tall som er større eller lik alle de andre tallene i verdiområdet til tallfølgen. Videre er den minste øvre grense til en reell tallfølge en øvre grense for tallfølgen som er mindre eller lik alle andre øvre grenser til tallfølgen. Begrepene 'øvre grense' og 'minste øvre grense' kan innføres mer generelt i

forbindelse med mengder av reelle tall. Er a en mengde med reelle tall er en øvre grense for a et tall som er større eller lik alle alle de andre tallene i mengden. En minste øvre grense for a er en øvre grense for a som er mindre eller lik alle andre øvre grenser for a. Vi betegner den minste øvre grense til en mengde med reelle tall a med "Sup(a)", supremum til a.

Den følgende sats sier at dersom f er en monotont stigende og oventil begrenset tall følge er grenseverdien til f ettersom n går mot uendelig identisk med den minste øvre grensen til verdiområdet til f, ie. Sup(Mg(f(n): nêNat)):

Teorem 10.3 Rf(f) & (An)(nêDom(f) –> f(n) ≤ f(n+1)) &
(Ek)(kêReell & (An)(nêDom(f) –> f(n)<k)) –>
Lim/n,∞/(f(n)) = Sup(Mg(f(n): nêNat))

Den følgende sats følger umiddelbart fra Teorem 10.3 og er på sitt vis analog med denne. Den angår imidlertid rekker:

Teorem 10.4 Rf(f) & g= (dnêNat)(∑/j,0,n/(f(j))) & (An)(nêNat –> f(n)>0)
(Ek)(kêReell & (An)(nêDom(g) –> g(n)<k)) –>
CRf(g) & (Ez)(z = ∑/n,0,∞/(f(n)))

Absoluttverdien til et reellt tall a, Abs(a), er definert ved at Abs(a) = a om a≥0 og Abs(a) = –a om a<0. Det sier da seg selv at Abs(a) =0 om a=0.

Den følgende sats er viktig og angår summen og produktet til konvergente rekker:

Teorem 10.5 Anta Rf(a) & Rf(b). Anta videre at (dnêNat)(∑/j,0,n/(a(j))) er en konvergent tallfølge og at det samme gjelder om (dnêNat)(∑/j,0,n/(b(j))). Da holder følgende påstander:

(a) ∑/j,0,∞/(a(j)+ b(j)) = ∑/j,0,∞/(a(j)) +∑/j,0,∞/(b(j))
(b) cêReell –> ∑/j,0,∞/(c*a(j)) = c*(∑/j,0,∞/(a(j))
(c) pêN –> ∑/j,0,∞/(a(j)) = ∑/j,0,p/(a(j)) + ∑/j,p+1,∞/(a(j))
(d) pêN –> ∑/j,p+1,∞/(a(j)) = ∑/j,0,∞/(a(j)) – ∑/j,0,p/(a(j))
(e) Rf(c) & pêNat & (An)(nêNat –> c(p+n) = a(n)) –>
∑/j,0,∞/(c(j)) = ∑/j,0,p–1/(c(j)) + ∑/j,0,∞/(a(j))

Vi trenger også den følgende sats som er en omordnings-sats for såkalte absolutt konvergente rekker. En rekke (dnêNat)(∑/j,0,n/(f(j))) kalles for *absolutt konvergent* om rekken (dnêNat)(∑/j,0,n/(Abs(f(j)))) er konvergent. Har to relle tallfølger det samme verdiområdet kan den første sies å være en omordning av den andre og vise versa. Satsen nedenfor sier at om a og b er relle tallfølger hvor b er en omordning av a og rekken (dnêNat)(∑/j,0,n/(a(j))) er absolutt konvergent så er de uendelige summene til de to rekkene som svarer til tallfølgene a og b identiske:

Teorem 10.6 (Omordningssats for absolutt konvergente rekker)
Rf(a) & CRf((dnêNat)(∑/j,0,n/(Abs(a(j))))) &
Rf(b) & Rgn(a) = Rgn(b): –> ∑/j,0,∞/(a(j)) = ∑/j,0,∞/(b(j))

Den følgende sats sier at en absolutt konvergent rekke også er konvergent:

Teorem 10.7 Rf(a) & CRf((dnêNat)(∑/j,0,n/(Abs(a(j))))) –>
CRf((dnêNat)(∑/j,0,n/(a(j))))

Vi trenger også den følgende sats:

Teorem 10.8 Anta Rf(a) & CRf((dnêNat)(∑/j,0,n/(a(j)))) og anta at g: Nat –>Nat der man har: (An)(nêNat –> g(n+1)> g(n)). Definer en uendelig rekke ved:

c(0) = ∑/j,0,g(0)/(a(j))
c(v+1) = ∑/j,g(v)+1,g(v+1)/(a(j))

Da gjelder:

∑/j,0,∞/(c(j)) = ∑/j,0,∞/(a(j))

Tilslutt skal vi gi bevis for den følgende meget enkle hjelpesetning:

Lemma 10.1 (a) ∑/n,0,j/(1/(2^n)) = 2*(1 – (1/2^(j+1)))
(b) Lim/j,∞/(∑/n,0,j/(1/(2^n))) = 2

Bevis: (a) Påstanden bevises ved indukjon på j. Basistrinn: j=0. Da har man at ∑/n,0,0/(1/(2^n)) = 1/2^0 = 1. På den annen side har man: 2*(1 – (1/2^(0+1))) = 2*(1 – (1/2)) = 2*(1/2) = 1. Satsen holder altså i dette tilfellet. Induksjonstrinn: Anta satsen holder for j. Vi ønsker å vise at den holder for j+1. Man har:

∑/n,0,j+1/(1/(2^n)) = ∑/n,0,j/(1/(2^n)) + 1/2^(j+1)
= 2*(1 – (1/2^(j+1))) + 1/2^(j+1) (Induksjonshypotese)
= 2 – (2/2^(j+1)) + (1/2^(j+1))
= 2 – 1/(2^(j+1))
= 2 – 2/(2^(j+2)) = 2*(1– 1/(2^(j+2)))

Dette viser at påstanden holder generelt.

(b) Anta e er et reellt tall der e>0. Det må finnes et naturlig tall m der vi har at 2^m> (1/e). Velg ut et slikt m. La oss kalle det n;0. Anta for vilkårlig n at n≥n;0. Da har man 2^n ≥ 2^(n;0) >(1/e). Det følger fra dette at 2^(n+1)> 2*(1/e). Fra dette kan man slutte 2/2^(n+1)<e. Herav følger:

2–e < (2– 2/2^(n+1)) < 2+e

Fra det vi så langt har vist følger, siden n var et vilkårlig naturlig tall, at

(En;0)(n;0êNat &
(An)(n≥n;0 –> (2– 2/2^(n+1))=∑/j,0,n/(1/2^n) ê <2–e, 2+e>))

Men siden e var vilkårlig positivt reellt tall har vi:

(Ae)(eêReell &e>0 –> (En;0)(n;0êNat &
(An)(n≥n;0 –> (2– 2/2^(n+1))=∑/j,0,n/(1/2^n) ê <2–e, 2+e>))

Fra dette, Definisjon 10.6, Definisjon 10.3 og Teorem 10.1 konkluderer vi med at ∑/n,0,∞/(1/2^n) = Lim/n,∞/(∑/j,0,n/(1/2^j)) = 2. **Q.E.D.**

Vi skal ta med ytterligere noen hjelpesetninger av rent matematisk natur.

Anta s: Nat –> Mg(a: aêReell & a≥0). Med andre ord anta at s er en funksjon som avbilder mengden av de naturlige tall inn i klassen av de positive reele tall. Dette innebærer at s er en reell tallfølge. Anta at den rekken som svarer til s, ∑/k,0,n/(s(k)) konvergerer mot a slik at a= Lim/n,∞/(∑/k,0,n/(s(k))). Dette innebærer at summen ∑/k,0,∞/(s(k)) eksisterer. Under disse omstendigheter vil det ikke spille noen rekkefølge vi summerer sammen de enkelte tall s(n). Tenker man seg en permutasjon h av Nat, dvs. en funksjon som avbilder Nat en-entydig på Nat, mao. som er slik at h: Nat –(1-1,på)–>Nat vil man også ha at ∑/k,0,∞/(s(h(k))) eksisterer og at denne summen er identisk med ∑/k,0,∞/(s(k)). Videre vil det være slik at om a er en tellbart uendelig delmengde av Nat=Dom(s), ie om a Inkl Nat & Cd(a) = Aleph;0 og h er en ennummerering av a, dvs. h: Nat-(1-1,på)–> a, så vil den

summen vi får når vi summerer sammen de diverse s(k) ettersom k gjennomløper a være mindre eller lik ∑/k,0,∞/(s(k)). De forhold som her er nevnt er naturligvis velkjente satser om konvergente rekker og vi sammenfatter det hele i den følgende sats:

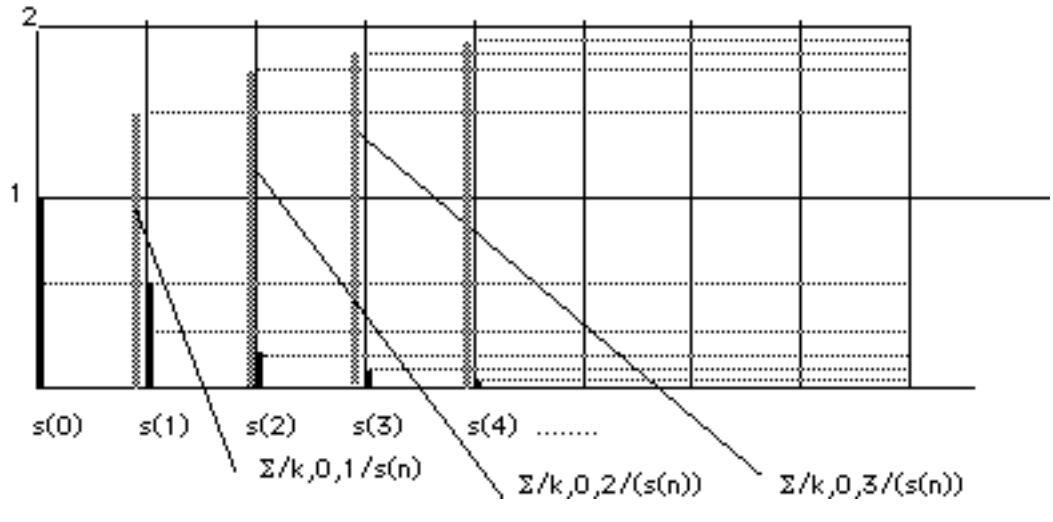
Teorem 10.9 Anta s: N –> Mg(y: yêReell &y>0). Anta aêReell og anta at a= Lim/k,∞/(∑/n,0,k/(s(n))) = ∑/n,0,∞/(s(n)). Da gjelder:

(a) (Ah)(h: Nat–(1-1,på)–>Nat –> ∑/n,0,∞/(s(h(n)) = a)

(b) (Ah)(h: Nat –(1-1)–> Nat –> ∑/n,0,∞/(s(h(n)) ≤a)

Et enkelt eksempel kan tjene til å belyse denne sats. La oss se på funksjonen s defiert ved s(n) = 1/2^n. Som vist ovenfor har vi ∑/n,0,∞/(1/2^n) = 2. Kutter vi vekk fra denne rekken s(n) for odde n, slik at vi står igjen med de diverse s(n) for like tall n vil summen av de diverse s(n) fremdeles eksistere og være ≤ 2. I dette tilfellet vil det være åpenbart at den er mindre enn 2 siden de enkelte ledd i sekvensen s(n) er større enn 0.

FIGUR



Den neste setningen vi ønsker å rette oppmerksomheten mot skal vi nå først gjøre rede for i ord før vi formulerer den i symboler. Anta X er en tellbart uendelig mengde og at f: X –> Reell+. (Mengden av de positive reelle tall). Anta videre at s er en opptelling av X, dvs. at s: Nat–(1-1,på) –> X og at ∑/n,0,∞/(f(n)) finnes. Det siste innebærer selvfølgelig at denne rekken konvergerer. La nå a være en delmengde av X. Det er da to muligheter: (i) a er en endelig mengde. Da vil åpenbart Mg(f(x): xêa) være en endelig mengde med reelle tall og vi definerer da summen til a med hensyn på f på forventet måte. (ii) a er tellbart uendelig. Er da ∂ en ennummerering av a, dvs. ∂: Nat –(1-1,på)–>a lar vi summen til a være ∑/n,0,∞/(f(∂(n)). Denne summen eksisterer under de forutsetningene vi har nevnt her og man kan vise dette ved hjelp av den foregående setning. Under alle omstendigheter vil summen til a være veldefinert og vi betegner den med ∑a. Hovedpoenget er nå det følgende: Anta at a;k (k= 0,2,....,n,...) er en partisjon av X i tellbart uendelig mange innbyrdes disjunkte og samlet uttømmende mengder. Det den følgende setning da påstår er at ∑/k,0,∞/(∑a;k), dvs. den uendelige summen av de diverse delsummene ∑a;k finnes, og at den er identisk med ∑/n,0,∞/f(s(n)).

Teoremet kan formuleres formelt slik:

Teorem 10.10 Anta f: X –> Reell+ og anta at X er en tellbart uendelig mengde. Anta s: Nat

–(1-1,på)–> X og at Lim/n,∞/(∑/k,0,n/(f(s(k)))) = aêReell. Da gjelder følgende:

(a) (Ah)(h: Nat –(1-1,på) –>X –> ∑/n,0,∞/f(h(n)) =a)

(b) (Ah)(h: Nat –(1-1) –>X –> ∑/n,0,∞/f(h(n)) ≤ a)

(c) Er q en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(i) q: Nat –> Pt(X)

(ii) (Ak)(Ai)(k,iêNat & k≠i –> q(k)Ωq(i) = ø)

(iii) (Ak)(kêNat –> q(k)≠ø)

(iv) UN/kêNat/(q(k)) = X

så gjelder det at følgende holder:

∑/n,0,∞/f(s(n)) = ∑/k,0,∞/(∑(q(k)))

Denne setningen, og særlig den siste delen av den, kan sikkert fortone seg temmelig komplisert. Vi skal ikke begi oss inn på beviset for satsen. For de lesere som er nysgjerrige på beviset vil vi her bare henvise til vanlige standardverker i analyse som behandler uendelige rekker.

§11 Teoremer om S+ og S÷

I denne paragrafen skal vi se på vise aspekter ved de teoriene som har blitt innført fra en rent matematisk sysnsvinkel og skrelle vekk det som ikke virker vesentlig om en slik betraktningmåte legges til grunn.

Fra en rent matematisk synsvinkel kan man betrakte klassen av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om et handlingsalternativ realiseres som en mengde X. Størrelen på den indre etiske verdi til et element i denne mengden kan da representeres ved et reellt tall, positivt om verdien er positiv og negativ om verdie er negativ og null dersom det dreier seg om et "nøytralt" eller "indifferent" element. Dette innebærer at en funsjon f;1: X –> Reell kunne brukes til å representere verdiene til de enkelte elementene i X. Tilslutt vil sannsynligheten for at en mulig konsekvens inntreffer kunne representeres ved en funksjon f;2 : X – > [0,1]. I første omgang skal vi derfor generelt betrakte strukturer av typen <X,f;1,f;2> der X er en ikke-tom mengde og f;1 og f;2 er to funksjoner som oppfyller de følgende krav: X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].

I §9 innførte vi endel begreper i forbindelse med strukturer av typen <X,f;1,f;2>. Det dreide seg for det første om pD(X,f;1,f;2), den positive delen av X med hensyn på f;1 og f;2 og nD(X,f;1,f;2), den negative delen til X med hensyn på f;1 og f;2. Videre innførte vi S+ (X,f;1,f;2), summen av den positive delen av X med hensyn på f;1 og f;2, og S÷(X,f;1,f;2), summen av den negative delen til X med hensyn på f;1 og f;2.

I det følgende forutsetter vi at <X,f;1,f;2> er en struktur av den typen som ble nevnt rett ovenfor. Den positive delen av X med hensyn på f;1 og f;2 utgjøres da av alle de elementene yêX der produktet av f;1(y) og f;2(y) er positivt. Nå er det klart at om denne positive delen er endelig og s er en enummerering av denne så vil den positive sum over X med hensyn på f;1 og f;2 være
∑/k,0,n–1/(f;1(s(k))* f;2(s(k)) om vi antar at lengden til s er n. (Man bør huske på at vi bruker von Neumanns versjon av de naturlige tall) En helt tilsvarende setning gjelder i det tilfelle at den negative delen til X med hensyn på f;1 og f;2 er endelig. De forhold som her er nevnt følger direkte fra definisjonene av S+(X,f;1,f;2) og S÷(X,F,1,f;2).

Anta nå på den annen side at pD(X,f;1,f;2) er tellbart uendelig. Finnes det da en enummerering s: Nat –(1-1,på)–> pD(X,f;1,f;2) slik at rekken
∑/k,0,n/(f;1(s(k))*f;2(s(k))) (n=0,1,2,.....) er absolutt konvergent finnes S+(X,f;1,f;2) og i

så fall har man S+(X,f;1,f;2) = ∑/k,0,∞/(f;1(s(k))*f;2(s(k))). I motsatt fall, om den nevnte rekken ikke er absolutt konvergent, følger det fra den definisjonen vi ga av S+ at summen til X med hensyn på f;1 og f;2 ikke eksisterer. En helt tilsvarende setning gjelder for den negative delen av X og den negative sum over X med hensyn på f;1 og f;2.

La oss tilslutt se på det tilfelle at pD(X,f;1,f;2) er overtellbar. Holder man seg da til den definisjonen vi tidligere har gitt av S+(X,f;1,f;2) ser man lett at denne summen ikke eksisterer. Igjen holder selvfølgelig en helt analog påstand for S÷(X,f;1,f;2). En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at S+(X,f;1,f;2) skal eksistere er derfor at pD(X,f;1,f;2) i høyden er tellbart uendelig og i tilfelle den er tellbart uendelig at rekken ∑/k,0,n/(f;1(s(k))*f;2(s(k))) er absolutt konvergent om s er en vilkårlig enummerering av pD(X,f;1,f;2).

De resultatene som nå har blitt nevnt er enkle konsekvenser av definisjonene i §9 og kan oppsummeres i de følgende to teoremer:

Teorem 11.1 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Da gjelder:

(a) Er Cd(pD(X,f;1,f;2)) =n & s: n –(1-1,på) –>pD(X,f:1,f;2) har man:
S+(X,f;1,f;2) = ∑/k,0,n-1/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))

(b) Er Cd(nD(X,f;1,f;2)) =n & s: n –(1-1,på) –>nD(X,f:1,f;2) har man:
S÷(X,f;1,f;2) = ∑/k,0,n-1/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))

(c) Har man (Ey)(y= S+(X,f;1,f;2)) og at s: Nat –(1-1,på) –>pD(X,f:1,f;2) har man: S+(X,f;1,f;2) = ∑/k,0,∞/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))

(c) Har man (Ey)(y= S÷(X,f;1,f;2)) og at s: Nat –(1-1,på) –>nD(X,f:1,f;2) har man: S÷(X,f;1,f;2) = ∑/k,0,∞/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))

Teorem 11.2 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Da gjelder:

(a) (Ey)(y=S+(X,f;1,f;2)) hvis og bare hvis
Cd(pD(X,f;1,f;2))≤Aleph;0 &
[Cd(pD(X,f;1,f;2))=Aleph;0 –>
(Ea)(Es)(s: Nat –(1-1,på)–> pD(X,f;1,f;2) & aêReell &
a = Lim/n–>∞/(∑/k,0,n/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))))]

(a) (Ey)(y=S÷(X,f;1,f;2)) hvis og bare hvis
Cd(nD(X,f;1,f;2))≤Aleph;0 &
[Cd(pD(X,f;1,f;2))=Aleph;0 –>
(Ea)(Es)(s: Nat –(1-1,på)–> nD(X,f;1,f;2) & aêReell &
a = Lim/n,∞/(∑/k,0,n/(f;1(s(k))* f;2(s(k)))))]

I tilfellet pD(X,f;1,f;2)= ø har man per definisjon at S+(X,f;1,f;2)=ø. Man kan i denne forbindelse konsultere definisjonen av S+ i §9. pD(X,f;1,f;2)≠ ø har man åpenbart i lys av Teorem 12.1 at S+(X,f;1,f;2)>0 om S+(X,f;1,f;2) finnes. Tilsvarende forholde gjelder for S÷(X,f;1,f;2). Av denne grunn holder følgende:

Teorem 11.3 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Da gjelder:

(a) (Ey)(y= S+(X,f;1,f;2)) –> S+(X,f;1,f;2)≥0)
(b) (Ey)(y= S÷(X,f;1,f;2)) –> S÷(X,f;1,f;2)≥0)

Det er ikke helt unaturlig å lese "S+(X,f;1,f;2)" som "summen av verdien til de positive elementene i i X med hensyn på f;1 redusert i forhold til sin sannsynlighet gitt ved f;2" og i forlengelsen av dette foreslå lesemåten "Den forventede verdien tid de positive elementene i X med hensyn på f;1 og f;2". Tilsvarende kunne man foreslå lesemåten " den forventede verdien til de negative elementene i X med hensyn på f;1 og f;2" i forbindelse med uttrykket "S÷(X,f;1,f;2)".

Vi har allerede nevnt noen satser i forbindelse med eksistensen til s+(X,f;1,f;2) og S÷(X,f;1,f;2). Nedenfor betrakter vi noen mer spesielle satser om dette. Vi ser først på:

Teorem 11.4 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Anta videre at s: Nat –(1-1,på)–> Mg(y: yêX & f;1(y)>0) og
aêReell & a= ∑/k,0,∞/(f;1(s(k))).
Da gjelder:
(Ey)(y = S+(X,f;1,f;2)

Som man ser innebærer dette teoremet at dersom den positive delen av X med hensyn på f;1, dvs. Mg(y: yêX & f;1(y)>0) er tellbart uendelig og summen av verdiene til til elementene i denne mengden eksisterer med hensyn til f;1 så vil også den positive forventede verdien til X med hensyn på f;1 og f;2 eksistere. Tenker man seg at X representerer de de mulige konsekvensene som kan inntreffe ved et gitt handlingsalternativ og at f;1 representerer en en funksjon som gir en et mål på den indre etiske verdi til elementene i X uttrykker forutsetningen i dette teoremet at summen av verdiene til de positive elementene i X eksisterer og at mengden av disse er tellbart uendelig. Det er mulig at denne forutsetningen bare er realisert i de færreste tilfelle. Vi nevner likevel satsen fordi det kan ha en viss interesse å se på hva som følger i en situasjon av denne art.

Et helt analogt teorem gjelder for S–:

Teorem 11.5 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Anta videre at s: Nat –(1-1,på)–> Mg(y: yêX & f;1(y)<0) og
aêReell & a= ∑/k,0,∞/(f;1(s(k))).
Da gjelder:
(Ey)(y = S÷(X,f;1,f;2)

Den følgende sats, om den totale sum S(X,f;1,f;2), er et helt opplagt korollar til Teorem 11.4 og Teorem 11.5:

Teorem 11.6 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) Inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].
Anta videre at s;1: Nat –(1-1,på)–> Mg(y: yêX & f;1(y)>0) og
aêReell & a= ∑/k,0,∞/(f;1(s;1(k))).
Anta dessuten at: s;2: Nat –(1-1,på)–> Mg(y: yêX & f;1(y)<0) og
aêReell & a= ∑/k,0,∞/(f;1(s;2(k))).
Da gjelder:
(Ey)(y = S(X,f;1,f;2)

Bevisene for Teorem 11.4 – Teorem 11.6 er basert på det følgende forhold. Ser man på for eksempel Teorem 11.4 impliserer forutsetningene at
R;n =∑/k,0,n/(f;1(s(k))) er en absolutt konvergent rekke. Har man da en annen rekke Q;n slik at Q;n≤R;n for alle nêNat vil også Q;n være en absolutt konvergent rekke. Men definerer vi Q;n ved

Q;n = ∑/k,0,n/(f;1(s(k))*f;2(s(k)))

ser man nettopp at dette er tilfellet. Det er også lett å ettervise at man nå kan definere en s' som avbilder Nat en-entydig på Mg(x: xêX & f;1(x)*f;2(x)>0). Under disse forutsetningene må derfor S+(X,f;1,f;2) eksistere.

Et mer sentralt og substansielt teorem som man kan bevise ved hjelp av Teorem 10.10 er det følgende generelle "summeringsteorem":

Teorem 11.7 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;1) inkl Reell og Rgn(f;2) Inkl [0,1].

(I) Anta a,bêPt(X) og X = aUb & aΩb=ø. Har man da at (Ey)(y=S(X,f;1,f;2)) gjelder:

S(X,f;1,f;2) = S(a,f;1,f;2) + S(b,f;1,f;2)

(II) Anta s : Nat –> Pt(X) og at s oppfyller de følgende krav:

(a) UN/n,0,∞/(s(n)) = X

(b) (Ak)(kêNat –> s(k) ≠ ø)

(c) (Ak)(Ar)(k,rêNat & k≠r –> s(k)Ωs(r) = ø)

Anta videre at (Ey)(y= S(X,f;1,f;2)). Da har man:

S(X,f;1,f;2) = Lim/n,∞/(∑/k,0,n/(S(s(k),f;1,f;2)) = ∑/k,0,∞/(S(s(k),f;1,f;2))

Vi gjør oppmerksom på at satsen ovenfor holder om man overalt erstatter "S(X,f;1,f;2)" med "S+(X,f;1,f;2)" eller "S÷(X,f;1,f;2)".

Det neste teoremet viser at det i en viss forstand er likgyldig hvilken verdiskala man benytter ved beregningen av forventet verdi bare den nye verdiskalaen "strekkes like langt og jevnt" i positiv og negativ retning.

Teorem 11.8 Anta X er en mengde der X≠ø og at f;1,f;2 er to funksjoner der X Inkl Dom(f;i) om i =1,2 og at Rgn(f;i) Inkl Reell. Anta p : X –> Reell.

Anta (Ey)(y= S(X,f;1,p), kêReell & k>0 og dessuten at

(Ay)(yêX –> f;1(y) = k*f;2(y))

(a) Har man da at Z Inkl X & Z≠ø gjelder at S(Z,f;1,p) = k*S(Z,f;2,p).

(b) Er a,b vilkårlige elementer i Pt(X) gjelder at

(i) S(a,f;1,p) > S(b,f;1,p) <–> S(a,f;2,p) > S(b,f;2,p)

(ii) S(a,f;1,p) = S(b,f;1,p) <–> S(a,f;2,p) = S(b,f;2,p)

(i) S(a,f;1,p) < S(b,f;1,p) <–> S(a,f;2,p) < S(b,f;2,p)

Det følgende sats er en mer spesiell utgave av summeringsteoremet ovenfor og kan oppfattes som en følgesetning til dette.

Teorem 11.9 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell og f: X–> [0,1]. Anta (Ey)(y= S(X,v,f)).

(a) Har man da ø≠a Inkl X og b = {k;0,.....,k;n} Inkl a gjelder:

S(a,v,f) = ∑/j,0,n/(v(k;j)*f(k;j)) + S(a–b,v,f)

(b) Har man at ø≠a Inkl X og s; Nat –(1-1)–>a og b=(a–Rgn(s)) gjelder:

$$S(a,v,f) = \sum/j,0,\infty/(v(s(j))*f(s(j))) + S(b,v,f).$$

Som en tilleggsbemerkning nevner vi på dette punkt at dersom <X,v,f> oppfyller kravene i dette teoremet og S(X,v,f) finnes så har man også at S(a,v,f) eksisterer for enhver delmengde a av X. Det er forholdsvis lett å innse dette om man studerer definisjonen av "S(X,f;1,f;2)" og tar i betraktning de matematiske hjelpesetningene som ble nevnt i forrige paragraf.

Vi nevner også det følgende korollar til Teorem 11.9:

Teorem 11.10 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell og f: X –> [0,1]. Anta a Inkl X og at kêa der a er en eller annen mengde. Anta videre at S(X,v,f) eksisterer. Da har man:

(i) S({k},v,f) = v(k)*f(k)
(ii) S(a,v,f)) v(k)*f(k) + S(a–{k},v,f)
(iii) S(a,v,f) – S(a–{k},v,f) = v(k)*f(k).

Hvordan denne satsen følger fra Teorem 11.9 skulle være temmelig opplagt.

Vi skal nå se på to andre satser som kan bevises ved hjelp av de setningene som vi har nevnt.

La oss først tenke oss at X representerer mengden av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe ved to handlingsalternativer h1 og h2. (X forutsettes selvfølgelig å være en ikke-tom mengde). Anta f;i : X –> [0,1] om i=1,2 og at v: X –> Reell. v er tenkt som en funksjon som angir den indre verdien til elementene i X. f;1 og f;2 representerer sannsynlighetene for de enkelte konsekvenser i X ved henholdsvis alternativet h;1 og h;2. Er kêX representerer følgelig f;1(x) sannsynligheten for x dersom h1 realiseres, f;2(x) snnsynligheten for x dersom alternativet h2 realiseres. Forutsetter vi det som nå er nevnt kan man si at S(X,v,f;i) representerer den forventede verdi til alternativet h;i (i=1,2).

Anta nå kêX. Da vil f;1(k)–f;2(k) representere sannsynlighetsdifferansen til k med hensyn på alternativene h1 og h2. Er sannsynligheten for k større ved h2 enn ved h1 er denne differansen negativ. Er sannsynligheten for k like stor ved de to alternativene er differansen lik 0 og er sannsynligheten for k ved h1 større enn ved h2 er differansen positiv.

Man ka om v(k) er positiv og sannsynlighetsdifferansen til k med hensyn på h1 og h2 oppfatte k som et argument til fordel for å velge h1 fremfor h2. k kunne sies å representere et gode som inntreffer med større sannsynlighet ved h1 enn ved h2. Likeledes om k har negativ verdi og negativ sannsynlighetsdif-feranse med hensyn på h1 og h2. k representerer i så fall et onde som inntreffer med mindre sannsynlighet ved h1 enn ved h2. Har v(k) og sannsynlighets-differansen til k med hensyn på h1 og h2 motsatt fortegn kan k oppfattes som et kontrargument til tesen om at h1 bør velges fremfor h2. Under de omstendigheter som her er nevnt kunne man kalle v(k)*(f;1(k)–f;2(k)) for vekten til elementet k. Elementer med positiv vekt er i så fall å regne som argumenter til fordel for å velge h1 fremfor h2 og de med negativ vekt kan oppfattes som argumentermot å velge h1 fremfor h2.

Anta nå at s: Nat–(1-1)–> X, med andre ord at s er en opptelling av visse elementer i X og anta at den forventede verdi til X–Rgn(s) er like stor med hensyn til v og f;1 som med hensyn til v og f;2. Det synes da rimelig å tro at S(X,v,f;1) > S(X,v,f;2) hvis og bare hvis summen av vektene til proargumentene i Rgn(s) er større en summen av vektene til kontraargumentene, mao. at h1 bør foretrekkes fremfor h2 om de totale summer av vektene til pro- og kontra-argumener forholder seg slik som antydet.

Man kan si at det følgende teorem gir en oppsummering av disse forhold. Det bør bemerkes at dersom a er et reellt tall skriver vi "|a|" for å betegne absoluttverdien til a.

Teorem 11.11 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell. Anta f;i :X–> [0,1] (i=1,2). Anta videre at S(X,v,f;i) eksisterer for i=1,2 og de følgendebetingelser holder:

(i) s: N–(1-1)–> X

(ii) S(X–Rgn(s),v,f;1) = S(X–Rgn(s),v,f;2)

Sett a;n = v(s(n)*(f;1(s;n) – f;2(s;n)) og

p;n = (|a;n| + a;n)/2 og q;n = (|a;n|– a;n)/2 (nêNat)

Under disse omstendigheter gjelder:

(a) S(X,v,f;1) > S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,∞/(p;n) > ∑/n,0,∞/(q;n)

(a) S(X,v,f;1) = S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,∞/(p;n) = ∑/n,0,∞/(q;n)

(a) S(X,v,f;1) < S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,∞/(p;n) = ∑/n,0,∞/(q;n)

Man kan i denne forbindelse bemerke at dersom s(n) er et kontraargument har man at a;n<0. Da ser man at p;n =0 og q;n>0. Tilsvarende om s(n) er et proargument. ∑/n,0,∞/(p;n) representerer derfor den totale vekt til proargumentene i Rgn(s), mens ∑/n,0,∞/(q;n) representerer den totale vekt til kontra-argumentene i denne mengden.

Et teorem som svarer til Teorem 11.11 gjelder i det endelige tilfellet:

Teorem 11.12 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell. Anta f;i :X–> [0,1] (i=1,2). Anta videre at S(X,v,f;i) eksisterer for i=1,2 og de følgendebetingelser holder:

(i) s: {0,....,k–1}–(1-1)–> X der k≥1

(ii) S(X–Rgn(s),v,f;1) = S(X–Rgn(s),v,f;2)

Sett a;n = v(s(n)*(f;1(s;n) – f;2(s;n)) og

p;n = (|a;n| + a;n)/2 og q;n = (|a;n|– a;n)/2 (nê{0,...,k–1}

Under disse omstendigheter gjelder:

(a) S(X,v,f;1) > S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,k–1/(p;n) > ∑/n,0,k–1/(q;n)

(a) S(X,v,f;1) = S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,k–1/(p;n) = ∑/n,0,k–1/(q;n)

(a) S(X,v,f;1) < S(X,v,f;2) <–> ∑/n,0,k–1/(p;n) = ∑/n,0,k–1/(q;n)

Det generelle "summeringsteoremet", Teorem 11.7 holder – som vi nevte – om S(X,f;1,f;2)" overalt erstattes med enten "S+(X,f;1,f;2)" eller "S÷(X,f;1,f;2)". Et lignende forhold gjelder i forbindelse med Teorem 11.9. Vi nevner derfor de følgende to teoremer i forbindelse meddenne sats:

Teorem 11.13 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell og f: X–> [0,1]. Anta (Ey)(y= S+(X,v,f)).

(a) Har man da ø≠a Inkl X og b = {k;0,.....,k;n} Inkl aΩ pD(X,f;1,f;2) gjelder:
S+(a,v,f) = ∑/j,0,n/(v(k;j)*f(k;j)) + S+(a–b,v,f)

(b) Har man at ø≠a Inkl X og s; Nat –(1-1)–>(aΩpD(X,f;1,f;2)) og b=(a–Rgn(s)) gjelder:
S+(a,v,f) = ∑/j,0,∞/(v(s(j))*f(s(j))) + S+(b,v,f).

En tilsvarende sats gjelder for S–:

Teorem 11.14 Anta X er en ikke-tom mengde og at v: X –> Reell og f: X–> [0,1]. Anta (Ey)(y= S(X,v,f)).

(a) Har man da ø≠a Inkl X og b = {k;0,.....,k;n} Inkl aΩ nD(X,f;1,f;2) gjelder:
S÷(a,v,f) = ∑/j,0,n/(v(k;j)*f(k;j)) + S÷(a–b,v,f)

(b) Har man at ø≠a Inkl X og s; Nat –(1-1)–>(aΩnD(X,f;1,f;2)) og b=(a–Rgn(s)) gjelder:

S÷(a,v,f) = ∑/j,0,∞/(v(s(j))*f(s(j))) + S÷(b,v,f).

Vi skal se separat på to teoremer som kan utledes fra dem som er nevnt ovenfor og som fortjener spesiell oppmerksomhet av grunner som vil bli drøftet i neste paragraf. Den første satsen kan formuleres slik:

Teorem 11.15 Anta X;1, X;2 er ikke tomme mengder og v: X;1UX;2 –> Reell. Anta videre at p;i : X;i –> [0,1] for i=1,2. Anta videre at følgende holder:

(i) k;0,k;1,....,k;nêX;1ΩX;2

(ii) (Ai)(Aj)(1≤i,j≤n –> v(k;i) = v(k;j)>0

(iii) v(k;0) <0 og n*v(k;1)>|v(k;0)|

(iv) (Ai)(0≤i≤n –> p;1(k;i) = p;1(k;0)=1)

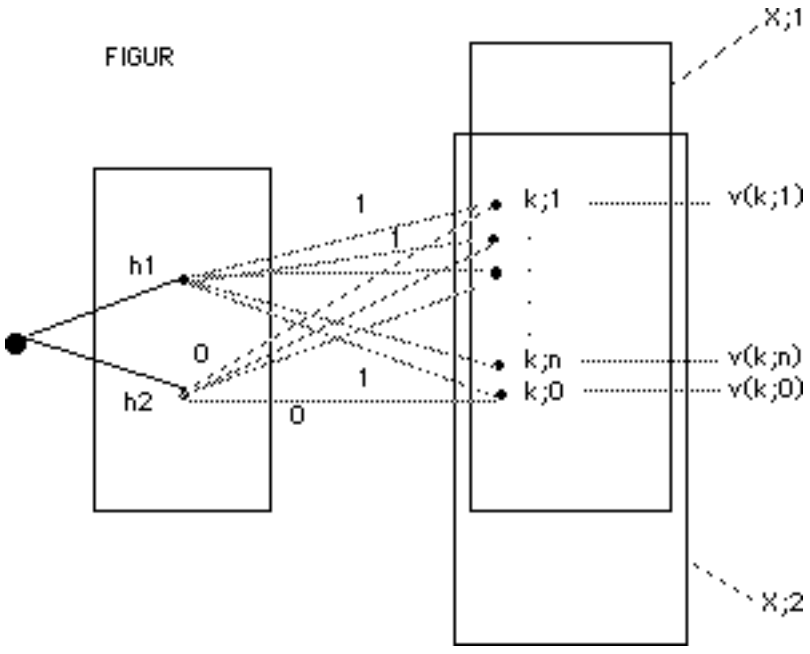
(v) (Ai)(0≤i ≤ n –> p;2(k;i)=0)

Sett A0 = {k;0,k;1....,k;n} og anta tilslutt at:

(vi) S(X;1–A0),v,p;1) = S(X;2–A0,v,p;2)

Under disse forutsetningene gjelder:

S(X;1,v,p;1) > S(X;2,v,p;2)



Forutsetningene i dette teoremet kan anskueliggjøres ved hjelp følgende diagram i det vi tenker oss at X;1 representerer klassen av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om handlingsalternativet h1 realiserers og X;2 representerer klassen av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om alternativet h2 realiseres. Er zêX;1 representerer p;1(z) sannsynligheten for at z inntreffer om h1 utføres. Er zêX;2 representerer p;2(z) sannsynligheten for at z inntreffer om man realiserer h2. Som man ser fra forutsetningen (i) er k;0,k;1,....,k;n mulige konse-kvenser som kan intreffe hva enten man utfører det ene eller det andre alternativet.

Den følgende sats er en variant av den foregående:

Teorem 11.16 Anta X;1, X;2 er ikke tomme mengder og v: X;1UX;2 –> Reell. Anta videre at p;i : X;i –> [0,1] for i=1,2. Anta videre at følgende holder:

(i) k;0,k;1,....,k;nêX;1ΩX;2
(ii) (Ai)(Aj)(1≤i,j≤n –> v(k;i) = v(k;j)>0
(iii) v(k;0) <0
(iv) cêReell & c>1 & v(k;1)/c> |v(k;0)|
(iv) (Ai)(0≤i≤n –> p;1(k;i) = 1/c) & p;1(k;0)=1
(v) (Ai)(0≤i ≤ n –> p;2(k;i)=0)

Sett A0 = {k;0,k;1....,k;n} og anta tilslutt at:

(vi) S(X;1–A0),v,p;1) = S(X;2–A0,v,p;2)

Under disse forutsetningene gjelder:

S(X;1,v,p;1) > S(X;2,v,p;2)

Ovenfor har vi definert operasjonen S(X,f,v). Det man nå kan spørre om er om det er mulig å definere predikatene "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)" og "Forv;(x,t,w)(z,h,f)" ved hjelp av dette begrepet og de andre ikke-logiske predikatene i L;ê[Δ;2]. Det viser seg at dette er tilfelle. La oss se på den følgende definisjon:

Definisjon 11.17

(a) Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f) <–> Alt;w(h,x,t) & VE(f) &M(y) &
y Inkl K;w(h,x,t) & z = S(y,f,P;w(h,x,t)) (b)
Forv;(x,t,w)(z,h,f) <–> Vekt;(h,x,t,w)(z,K;w(h,x,t),f)

Man ser her at predikatene "Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f)" og "Forv;(x,t,w)(z,h,f)" som vi har tatt som primitive i språket til KET1 nå er definert ved hjelp av de andre predikatene i språket til KET1.

Er det nå mulig å utlede de aksiomene om forventet verdi og vekt som vi betraktet i §2.5, AFV1 – AFV12 fra disse definisjonene? Svaret på dette er at fra Definisjon 11.17 alene (gitt de andre prinsippene i KET1) kan man ikke utlede de nevnte aksiomer. Men fjerner man AFV1 – AFV2 fra KET1, innfører definisjonen ovenfor og legger til den følgende setning som nytt ikke-logisk aksiom til erstatning for AFV-aksiomene kan man utlede disse sistnevnte aksiomer:

(AFV+) Alt;w(h,x,t) & VE(f) & yêPt(K;w(h,x,t)) –>
(Ez)(z= S(y,f,P;w(h,x,t))

La oss fremstille dette teoremet mer formelt. Vi setter per definisjon at KET1+ er den teorien som er som KET1 bortsett fra de følgende forandringer: (i) Språket til KET1+ er som språket til KET1 bortsett fra at vi har fjernet predikatene (12) og (13) i §1 fra det ikke-logiske vokabularet og innført dem ved Definisjon 11.17 i stedet. (ii) De ikke-logiske aksiomene i KET1+ er dem i KET1 bortsett fra at vi har fjernet aksiomene AFV1 – AFV12 og erstattet dem med AFV+ ovenfor.

Gitt denne definisjonen holder den følgende sats:

Teorem 11.18 (i) I teorien KET1+ er formlene AFV1 – AFV12 teoremer.
(ii) Alle teoremene i KET1 kan utledes i KET1+.

Fra dette teoremet fremgår det at teorien KET1+ deduktivt sett er sterkere enn KET1.

En tilsvarende endring kan gjøres i forbindelse med teorien KET2. Vi definerer teorien KET2+ på den følgende måte: Vi setter per definisjon at KET2+ er den teorien som er som KET2 bortsett fra de følgende forandringer: (i) Språket til KET2+ er som språket til KET2 bortsett fra at vi har fjernet predikatene (12) og (13) i §1 fra det ikke-logiske vokabularet og innfører dem ved den følgende definisjon:

Definisjon 11.19

(a) Vekt;(h,x,t,w)(z,y,f) <–> Alt;w(h,x,t) & VE(f) &M(y) &
y Inkl K;w(h,x,t) & z = S(y,f,P;w(h,x,t)) (b)
Forv;(x,t,w)(z,h,f) <–> Vekt;(h,x,t,w)(z,TBS(K;w(h,x,t)),f)

(ii) De ikke-logiske aksiomene i KET2+ er dem i KET2 bortsett fra at vi har fjernet aksiomene AFV1 –AFV5, AFV6*, AFV7 – AFV12 og erstattet dem med AFV+ ovenfor.

Analogt med Teorem 11.18 har man da:

Teorem 11.20 (i) I teorien KET2+ er formlene AFV1 –AFV5, AFV6*, AFV7 – AFV12 teoremer.

(ii) Alle teoremene i KET2 kan utledes i KET2+.

Når det gjelder Definisjon11.19 ser man at den første delen er identisk med den tilsvarende første delen av Definisjon 11.17. Men den forventede verdien til et handlingsalternativ er nå ikke lenger vekten til mengden av alle de mulige konsekvensene som kan inntreffe ved dette alternativet, men snarere vekten til mengden av alle tilstandsbeskrivelser over mengden av de mulige konsekvensene som kan inntreffe ved alternativet.

Sammenfattende har vi betraktet fire hovedteorier så langt. Forholdet mellom disse kan anskueliggjøres ved den følgende figur:

Når det gjelder forholdet mellom KET1 og KET2 er disse usammenlignbare når det gjelder styrke. Det samme gjelder forholdet mellom KET1+ og KET2+.

§11.1 Et eksempel som synes å vise at KET1 har visse motintuitive konsekvenser.

I denne paragrafen skal vi se på et eksempel som noen vil oppfatte som problematisk for den konsekvensetiske teorien som har blitt fremlagt så langt. Eksemplet, som det etterhvert vil fremgå, viser ikke at teorien logisk sett er inkonsistent, men viser at teorien tilsynelatende har visse motintuitive konsekvenser.

Vi utvider først språket til KET1 med visse nye predikater som trengs for en helt formalisert fremstilling av eksemplet. Predikatene er de følgende:

(a) "x lider av malaria ved tidspunktet t i verdenen w" – "L;w(x,t)"
"x helbredes for malaria ved et tidspukt som kommer
temmelig nært i tid etter tidspunktet t i verdenen w" – "Hl;w(x,t)"
"I verdenen w dør ti personer under grusomme smerter
ved et tidspunkt som kommer nokså nær etter tidspunktet

t i tid" – "D;w(t)"

Vi skal nå ta i betrakting de følgende forutsetninger:

Vi antar først at h1 og h2 er to handlingsalternativer som står åpne for individet x ved tidspunktet t i verdenen w. Denne forutsetningen kan uttrykkes slik:

(i) Alt;w(h1,x,t) & Alt;w(h2,x,t)

Vi skal videre anta at f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn:

(ii) VE(f)

I det følgende skal vi bruke de følgende definisjoner. d(t) = μ;-1(Mg(w: D;w(t))). d(t) er følgelig det utsagnet at ti personer dør under grusomme smerter ved et tidspunkt som kommer nokså nær etter tidspunktet t i tid. Videre settes per definisjon m(x,t) = μ;-1(Mg(w: Hl;w(x,t))). m(x,t) er følgelig utsagnet at individet x helbredes for malaria ved et tidspunkt som kommer temmelig nær i tid etter tids-punktet t". Vi skal nå videre forutsette:

(iii) (Ax)(L;w(x,t) –> f(m(x,t))>0)
(iv) (Ax)(Ay)(L;w(x,t) & L;w(y,t) & x≠y & têT –>
m(x,t)≠m(y,t) & f(m(x,t))= f(m(y,t)))
(v) (At)(têT –> f(d(t))<0)
(vi) nêNat & n*f(m(y,t)) > |f(d(t))|
(vii) têT & L;w(y,t)

Som man ser på basis av de forklaringer som har blitt gitt uttrykker (iii) at hvis x er en person som lider av malaria ved tidspunktet t i verdenen w beskriver utsagnet at x helbredes for malaria ved et tidspunkt som kommer temmelig nær i tid etter tidspunktet t et forhold som verdifunksjonen f tilordner positiv verdi.
Videre uttrykker (iv) at dersom x og y er distinkte individer som lider av malaria ved tidspunktet t i verdenen w så er utsagnene m(x,t) og m(y,t) distinkte og det er også slik at de har like stor positiv verdi relativt til f. (v) uttrykker at dersom t er et tidspunkt så tilordner verdifunksjonen f utsagnet at ti personer dør under grusomme smerter ved et tidspunkt som kommer nokså nær etter tidspunktet t i tid negativ verdi. (vi) uttrykker verdien til m(y,t) multiplisert med et naturlig tall m er større en absoluttverdien til den verdi som funksjonen f tilordner utsagnet d(t). Endelig uttrykker (vii) at t er et tidspunkt og at y er en person som lider av malaria ved tidspunktet t i verdenen w.

I det følgende setter vi per definisjon: K;w(h,x,t) = Mg(k: Kon;<x,h,w,t>(k)). Fra våre tidligere forklaringer skulle det da fremgå at K;w(h,x,t) er klassen av alle de utsagn som beskriver mulige konsekvenser som kan inntreffe dersom x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h i verdenen w. Vi setter videre:
p;w(h,x,t)(k) = (iz)Pr;<x,h,w,t>(z,k). Dette innebærer at p;w(h,x,t)(k) er sannsynligheten for at konsekvensen k vil inntreffe dersom x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h i verdenen w.

Vi skal ytterligere gjøre de følgende forutsetninger:

(viii) q: n –(1-1)–> Mg(x: L;w(x,t))
(ix) (Ak)(kên –> m(q(k),t)ê(K;w(h1,x,t)ΩK;w(h2,x,t)))
(x) d(t)ê(K;w(h1,x,t)ΩK;w(h2,x,t))

Vi forutsetter enn mer:

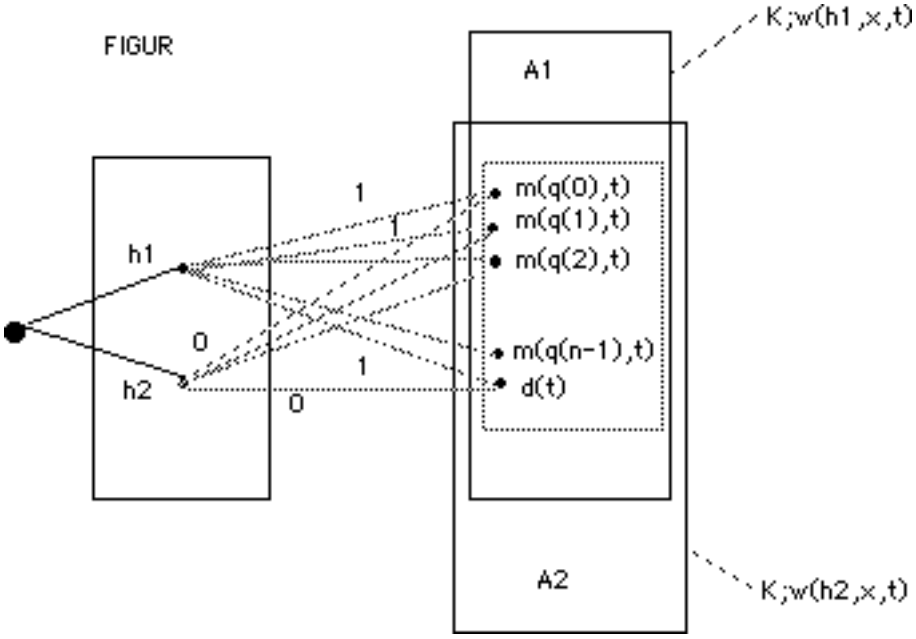
(xi) A1 = K;w(h1,x,t) – ({d(t)} U Mg(m(q(k),t): kên))

(xii) A2 = K;w(h2,x,t) – ({d(t)} U Mg(m(q(k),t): kên))
(xiii) S(A1, f, p;w(h1,x,t)) = S(A2,f,p;w(h2,x,t))

Dessuten forutsetter vi helt tilslutt det følgende om sannsynlighetene til de diverse konsekvensene i K;w(h1,x,t) og K;w(h2,x,t):

(xiv) (Ak)(kên –> p;w(h1,x,t)(m(q(k),t)) =1) & p;w(h1,x,t)(d(t)) =1
(xv) (Ak)(kên –> p;w(h2,x,t)(m(q(k),t)) =0) & p;w(h2,x,t)(d(t)) =0

Dermed har vi gitt en helt eksplisitt oversikt over alle de forutsetningene vi vil gjøre i dette eksemplet. På det følgende diagrammet er disse forutsetningene forsøkt anskueliggjort.



Som man ser innebærer dissse forutsetningene at dersom x ved tidspunktet t realiserer handlingsalternativet h1 er sannsynligheten lik 1 for at personene q(0),...,q(n-1) som lider av malaria blir helbredet for denne sykdommen ved et tidspunkt som kommer temmelig nært etter t i tid. På den annen side er det en sannsynlighet lik 1 for at ti personer dør under grusomme smerter ved et tidspunkt som kommer nokså nær etter tidspunktet t i tid. Velger x på den annen side handlingsalternativet h2 ved t er sannsyligheten for disse konsekvensene lik 0. Når det gjelder alle mulige andre konsekvenser ved de to alternativene står de likt. Hvilke av de to alternativene bør x foretrekke? Eller, hvis man ytterligere forutsetter at x bare kan velge mellom h1 eller h2 og at ingen andre alternativer står åpne, hvilket av disse alternativene bør da x utføre?

Det virker som om noen vil være av den mening at hvis situasjonen er som angitt ved forutsetningene (i) – (xv) så bør x ikke velge h1 fremfor h2 uansett hvor stort antallet n er, dvs. uansett hvor mange som blir helbredet av malaria. De som inntar dette standpunkt vil ha en tendens til å hevde at selvom en trilliard personer ble helbredet for malaria ville ikke dette kunne oppveie eller rettferdiggjøre at man bidrar til at man lar ti personer avgå ved døden under de grusomme smerter. De vil hevde at dette er ytterst uetisk og reagere med avsky på en person som i den situasjon som er beskrevet velger h1.

Hvis man imidlertid fastholder forutsetningene (i) – (xv) følger fra disse og Teorem 11.16 at h1 er et alternativ som har større forventet verdi enn h2 for x ved tidspunktet t i

verdenen w og at x derfor bør foretrekke alternativet h1 fremfor h2. Man ser lett at om (i) – (xv) holder så vil forutsetningene i Teorem 11.16 være oppfylt om vi setter k;0 = d(t), k;i = m(q(i-1),t) for i=1,...,n, ovidere setter X;1 = K;w(h1,x,t) & X;2 = K;w(h2,x,t), og endelig setter v=f, p;1 = p;w(h,1,x,t) og p;2 = p;w(h2,x,t). Man kan da fra (i) – (xv) og Teorem 11.16 utlede:

(+) S(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h;1,x,t)) > S(K;w(h;2,x,t),f,p;w(h;2,x,t))

Det er klart at Teorem 11.16 , fordi det er et rent matematisk teorem, også er et teorem i KET1. Det følger derfor at vi har vist at det følgende teorem holder i KET1 om man tenker seg språket til denne teorien utvidet med predikatene nevnt ved (a) ovenfor:

Teorem 11.1.1 (KET1) Anta at det følgende holder:

(i) Alt;w(h1,x,t) & Alt;w(h2,x,t)
(ii) VE(f)
(iii) (Ax)(L;w(x,t) –> f(m(x,t))>0)
(iv) (Ax)(Ay)(L;w(x,t) & L;w(y,t) & x≠y & têT –>
m(x,t)≠m(y,t) & f(m(x,t))= f(m(y,t)))
(v) (At)(têT –> f(d(t))<0)
(vi) nêNat & n*f(m(y,t)) > |f(d(t))|
(vii) têT & L;w(y,t)
(viii) q: n –(1-1)–> Mg(x: L;w(x,t))
(ix) (Ak)(kên –> m(q(k),t)ê(K;w(h1,x,t)ΩK;w(h2,x,t)))
(x) d(t)ê(K;w(h1,x,t)ΩK;w(h2,x,t))
(xi) A1 = K;w(h1,x,t) – ({d(t)} U Mg(m(q(k),t): kên))
(xii) A2 = K;w(h2,x,t) – ({d(t)} U Mg(m(q(k),t): kên))
(xiii) S(A1, f, p;w(h1,x,t)) = S(A2,f,p;w(h2,x,t))
(xiv) (Ak)(kên –> p;w(h1,x,t)(m(q(k),t)) =1) & p;w(h1,x,t)(d(t)) =1
(xv) (Ak)(kên –> p;w(h2,x,t)(m(q(k),t)) =0) & p;w(h2,x,t)(d(t)) =0

Da gjelder:
(+) S(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h;1,x,t)) > S(K;w(h;2,x,t),f,p;w(h;2,x,t))

Som en oppsummering kan man derfor si at vi befinner oss i en situasjon hvor det synes som om KET1 har visse klart uønskelige konsekvenser siden teoremet ovenfor vel kan hevdes å være uforenelige med hva man umiddelbart vil finne rimelig fra en etisk synsvinkel.

La oss se litt nærmere på dette. Man kan betrakte konjunksjonen av forutsetningene (i), (ii) og (vi) – (xv) ovenfor. Dette er en åpen setning i språket til teorien KET1 utvidet med predikatene nevnt ved (a). I denne åpne setningen forekommer bare variabeltegnene x,y,f,h1,h2,n,t og q fri. La oss forkorte denne åpne setningen med "H(w,x,y,f,h1,h2,n,t,q)". La oss forkorte den universelle lukningen av konjunksjonen av forutsetningene (ii) – (v) med K.

Innføres disse forkortningskonvensjonene kan teoremet ovenfor reformuleres mer konsist slik:

Teorem 11.1.2 H(w,x,y,f,h1,h2,n,t,q) & K. –>
S(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h;1,x,t)) > S(K;w(h;2,x,t),f,p;w(h;2,x,t))

Vi har tidligere innført predikatet "h;1 er et handlingsalternativ som er minst like bra som h;2 for x ved tidspunktet t i verdenen w" som vi forkorter med "Mb;<w,x,t>(h;1,h;2)". La oss definere "B;<w,x,t>(h;1,h;2)" ved:

Definisjon 11.1.3 $B;\langle w,x,t\rangle(h;1,h;2) \leftrightarrow Mb;\langle w,x,t\rangle(h;1,h;2) \,\&\, \neg Mb;\langle w,x,t\rangle(h;2,h;1)$

Man kan nå betrakte den følgende tese:

(T) $Mb;\langle w,x,t\rangle(h;1,h;2) \leftrightarrow (Ef)(VE(f) \,\&\, S(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h;1,x,t)) \geq S(K;w(h;2,x,t),f,p;w(h;2,x,t)))$

Betegner vi den universelle lukningen av T med T' har vi at den følgende sats følger fra Teorem 11.1.1:

Teorem 11.1.3 $H(w,x,y,f,h1,h2,n,t,q) \,\&\, K \,\&\, T'. \rightarrow B;\langle w,x,t\rangle(h1,h2)$

Er nå de intuisjonene riktige som innebærer at at man bør velge h2 fremfor h1 i den situasjonen som er nevnt ovenfor synes dette å innebære at man gir sin tilslutning til den universelle lukningen av den følgende tese:

(++) $H(w,x,y,f,h1,h2,n,t,q) \,\&\, K \rightarrow B;\langle w,x,t\rangle(h2,h1)$

Fra Teorem 11.1.3 og (++) følger imidlertid at dersom man fastholder KET1, K og T' så kan det ikke finnes noen objekter som oppfyller betingelsen H(w,x,y,f,h1,h2,n,t,q). Dette synes urimelig. Aksepterer man derfor (++), KET1 og prinsippet T' er man tvunget til å oppgi K. Av konjunktene i K kan vel (iii) og (v) vanskelig betviles. Mistanken faller da nokså naturlig på forutsetningen (iv). I den neste paragrafen skal vi se på visse verditeoretiske prinsipper som kan formuleres i språket til KET1 og som under visse forutsetninger impliserer negasjonen av konjunkten (iv) i K. Dette vil være en mulig utvei av de vanskelighetene som er antydet her.

Det er imidlertid andre muligheter som kan undersøkes. En mulighet er at man kan bestride at det er umoralsk å velge h1 fremfor h2 i den situasjonen som er beskrevet ovenfor. Man kan altså forsøke å "bortforklare" de intuisjoner noen har som synes å lede dem til å akseptere (++).

En annen mulighet er å revidere selve teorien KET1 og kanskje spesielt prinsipper av typen T'. En mulighet er da å benekte at det finnes noe grunnlag for en å sammenligne kvantitativt verdien til alle mulige konsekvenser ved et handlingsalternativ. Med andre ord kan man benekte eksistensen av en generell etisk verdifuksjon f over klassen av utsagn og i overenstemmelse med dette endre grunnleggende beslutningsteoretiske prinsipper i KET1. Man kan f.eks. hevde at de diverse m(x,t) for der L;w(x,t) kan sammenlignes kvantitativt med hensyn på verdi innbyrdes, men at disse mulige konsekvensene ikke kan sammenlignes med d(t). Man kan ta sitt utgangspunkt i den svakere verditeorien vi har beskrevet tidligere og begrense maksimeringsprinsippet til de situasjoner der konsekvensene er kvantitativt sammenlignbare.

En tredje mulighet er å forsøke å revidere prinsippet T'. Vi skal etterhvert se på en mulig revisjon av dette som gjør det umulig å utlede brysomme teoremer av den typen vi har utledet her.

§12 Om visse verditeoretiske prinsipper.

I denne paragrafen skal vi se på enkelte verditeoretiske setninger i språket til teorien KET1 som har en viss relevans for teoremene i den forrige paragrafen.
La det med en gang være sagt at jeg er ytterst usikker på om noen av disse setningene er korrekte.

Før vi presenterer den første av disse setningene gi vi den følgende definisjon:

Definisjon 12.1 C;<w,f>(h,x,t) = Mg(y: yêK;w(h,x,t) & f(y)* p;w(h,x,t)(y)>0)

Er f en etisk verdifunksjon over klassen av alle utsagn ser man altså at C;<w,f>(h,x,t) er mengden av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe dersom x ved t realiserer handligsalternativet h og som dessuten er slik at produktet av deres verdi, angitt ved verdifunksjonen f, og sannsynligheten er større enn 0. Hvis vi benytter en notasjon vi tidligere har innført ser man at man har C;<w,f>(h,x,t) = pD(K;w(h,x,t),f, p;w(h,x,t)).

Den første verditeoretiske tesen som vi ønsker å kommentere er denne:

VE1 VE(f) –> (Ea)(aêReell & a>0 &
(Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>
[(As)(s: Nat –(1–1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a) &
(As)(An)(1≤nêNat & s: n–(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t) –>
∑/j,0,n–1/(f(s(j)) <a)]))

La oss forsøke å gjøre rede for hva denne – tilsynelatende kompliserte og uigjennomtrengelige – setningen egentlig sier i vanlig språk.

Setningen uttrykker at dersom f er en etisk verdifunksjon over klassen av alle utsagn finnes det et positivt reelt tall a som oppfyller det følgende krav: Er x,t, hog w vilkåelige objkter som er slik at h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så skal følgende to ting være tilfelle:
(a) Er s en tellbart uendelig opptelling av visse elementer i C;<w,f>(h,x,t) så skal summen av verdiene med hensyn på f til alle de elementene som s teller opp være mindre enn a. (b) Er s en endelig opptelling av visse elementer i C;<w,f>(h,x,t) så skal også summen av verdiene til de elementene som telles opp være mindre en a. Litt unøyaktig formulert uttrykker altså setningen at det finnes en øvre grense for summen av de positive verdier som kan realiseres ved et bestemt handlingsalternativ,

Det kan være av interesse å se på en del satser som kan bidra til å belyse innholdet til VE1. La det være klart med en gang at vi oppfatter VE1 som en potensielt kontroversiell tese – kanskje er det mest sannsynlig at den er helt usann. Det kan likevel være av interesse å se nærmere hva som følger fra den.

Vi skal først bevise:

Lemma 12.2 Anta VE(f) og at
(Ah)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y = S+(K;w(h,x,t),f, p;w(h,x,t))))
Anta Alt;w(h,x,t). Da gjelder:
Cd(C;<w,f>(h,x,t)) ≤ Aleph;0.

Bevis: Fra forutsetningene følger (1) y = S+(K;w(h,x,t),f, p;w(h,x,t)) for noe y. Fra definisjonen av S+ følger at en av to ting må være tilfelle: (i) Det finnes en s der s: Nat –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) og der man har

y = ∑/j,0,∞/(f(s(j))*p;w(h,x,t)(s(j))). Siden, som tidligere bemerket, man har at C;<w,f>(h,x,t) = pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) følger i så fall at Cd(C;<w,f>(h,x,t)) ≤ Aleph;0. Påstanden holder derfor i dette tilfellet. (ii) Det finnes nêNat og s slik at s: n –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) og der y = ∑/j,0,n–1/(f(s(j))*p;w(h,x,t)(s(j))). I dette tilfellet har man åpenbart at:

Cd(pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t))) = Cd(C;<w,f>(h,x,t)) < Aleph;0

Satsen holder altså i alle tilfelle. **Q.E.D.**

La oss dernest gi bevis for:

Lemma 12.3 (a) Anta VE(f) & Alt;w(h,x,t). Anta videre at

s: Nat –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t) & (Ey)(y = ∑/j,0,∞/(f(s(j)))

Anta videre at f;0 = Mg(<x,1>: xêC;<w,f>(h,x,t)). Da gjelder:

∑/j,0,∞/(f(s(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, f;0)

(b) Anta VE(f) & Alt;w(h,x,t). Anta videre at nêN og at s: n –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t). Anta f;0 = Mg(<x,1>: xêC;<w,f>(h,x,t)). Da gjelder:

∑/j,0,n–1/(f(s(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, f;0)

Bevis: (a) Anta forutsetningene holder. Vi skal først vise at

(1) C;<w,f>(h,x,t) = pD(K;w(h,x,t),f, f;0)

Vi ser først på inklusjonen mot høyre: Anta (2) aêC;<w,f>(h,x,t). Da har man etter definisjonen av "C;<w,f>" at (3) f(a)* p;w(h,x,t)(a)>0 & aêK;w(h,x,t). Det følger fra dette at (4) f(a)>0. Siden aêC;<w,f>(h,x,t) har man at aêDom(f;0) og derfor at f;0(a)= 1. Man har derfor: (5) aêK;w(h,x,t) & f(a)*f;0(a)>0. Fra dette og definisjonen av pD følger aêpD(K;w(h,x,t),f, f;0). Vi gir dernest et bevis for inklusjonen mot venstre: Anta for vilkårlig a at (6) aêpD(K;w(h,x,t),f, f;0). Da følger at (7) aêK;w(h,x,t) & f(a)*f;0(a)>0. Fra den siste konjunkten f;0(a) er definert og derfor at (8) aêDom(f;0). Fra dette og definisjonen av f;0 har man at aêC;<w,f>(h,x,t).

Fra forutsetningen s: Nat –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t) og (1) følger:

(9) s: Nat –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f, f;0). Er nå jêDom(s) for vilkårlig j har man derfor at s(j) er med i pD(K;w(h,x,t),f, f;0) og følgelig at f(s(j))*f;0(s(j))>0. Det følger da at f;0 er definert for s(j) og derfor at f;0(s(j)) =1. Dette innebærer at vi har:

(Aj)(jêDom(s) –> f;0(s(j)) =1)

Fra forutsetningen om at (Ey)(y = ∑/j,0,∞/(f(s(j))) følger det at det finnes noe y slik at (10) y = ∑/j,0,∞/(f(s(j))). Fra dette følger:

y = ∑/j,0,∞/(f(s(j))*1) = ∑/j,0,∞/(f(s(j))* f;0(s(j))). Dette, (9) og og definisjonen av S+ impliserer:

∑/j,0,∞/(f(s(j)) = y = S+(K;w(h,x,t),f, f;0) som er det vi ønsker.

(b) Anta forutsetningene holder. Da finnes det n slik at

(11) s: n –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t). Vi kan utlede (1) ovenfor på samme måte som tidligere. Dette innebærer at man må ha:

(12) s: n –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f, f;0) Er nå jêDom(s) for vilkårlig j har man derfor at s(j) er med i pD(K;w(h,x,t),f, f;0) og følgelig at f(s(j))*f;0(s(j))>0. Det følger da at f;0 er definert for s(j) og derfor at f;0(s(j)) =1. Dette innebærer at vi har:

(Aj)(jêDom(s) –> f;0(s(j)) =1)

Vi har derfor:

∑/j,0,n–1/(f(s(j)) = ∑/j,0,n–1/(f(s(j)* f;0(s(j))) I lys av definisjonen av S+ følger: S+(K;w(h,x,t),f, f;0) = ∑/j,0,n–1/(f(s(j)* f;0(s(j))) = ∑/j,0,n–1/(f(s(j)). Dette viser at (b) holder. **Q.E.D.**

Vår neste sats er denne:

Lemma 12.4 Anta:

(i) VE(f) &(Ah)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y=S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t))))

Sett per definisjon at $f;0$ = Mg(<x,1>: xêC;<w,f>(h,x,t)). Gitt disse forutsetningene har man at VE1 er ekvivalent med:

(VE2) (Ea)(aêReell & a>0 &
(Ah)(Ax)(At)(Aw)(Alt;w,h,x,t) –>S+(K;w(h,x,t),f,f;0)<a))

(VE3) (Ea)(aêReell & a≥0 &
a = Sup(Mg(S+(K;w(h,x,t),f,f;0): Alt;w(h,x,t))))

Bevis: (A) Anta forutsetningene og VE1 holder. Da finnes a slik at:

(1) aêReell & a>0

(2) (Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>
[(As)(s: Nat –(1–1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a) &
(As)(An)(1≤nêNat & s: n–(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t) –>
∑/j,0,n–1/(f(s(j)) <a)]))

Anta for vilkårlige h,w,x,t at: (3) Alt;w(h,x,t). Fra dette, forutsetningene og Lemma 12.2 følger:

(4) Cd(C;<w,f>(h,x,t)) ≤ Aleph;0.

Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Cd(C;<w,f>(h,x,t)) = Aleph;0. Da finnes det en korrelasjon s slik at (5) s: Nat –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t). Fra (2), (3) og (5) følger: ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a. Men fra dette, (3), (5) og Lemma 12.3 :

∑/j,0,∞/(f(s(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, f;0) <a. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Cd(C;<w,f>(h,x,t)) < Aleph;0. Da finnes det nêNat og s slik at

(6) s: n –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t). Fra dette, (2) og (3) har vi i lys av Lemma 12.3, punkt (b):

∑/j,0,n–1/(f(s(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, f;0) <a.

Vi har nå vist, siden h,w,x,t var vilkårlige at:

(7) (Ah)(Ax)(At)(Aw)(Alt;w,h,x,t) –>S+(K;w(h,x,t),f,f;0)<a))

Dette og (1) impliserer at VE2 holder.

(B) Anta på den annen side at forutsetningene og VE2 holder. Da finne det a slik at:

(8) aêReell & a>0

(9) (Ah)(Ax)(At)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>S+(K;w(h,x,t),f,f;0)<a)

Anta for vilkårlige w,x,h,t at (10) Alt;w(h,x,t). Fra dette og (9) følger:

(11) S+(K;w(h,x,t),f,f;0)<a Dette innebærer at det finnes y der:

(12) S+(K;w(h,x,t),f,f;0)= y & y<a

(i) Anta (+) s: Nat –(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t). Fra dette, (12) og definisjonen av S+ følger at Cd(C;<w,f>(h,x,t)) = Aleph;0. I lys av Lemma 12.3 og forutsetningene i teoremet har man:

(13) C;<w,f>(h,x,t) = pD(K;w(h,x,t),f, f;0)

Fra dette og (12) følger eksistensen av s1 slik at:

(14) s1 : Nat–(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t) &
y = ∑/j,0,∞/(f;0(s1(j))*f(s1(j))) = ∑/j,0,∞/(f(s1(j))) <a

Men fra (14) og (+) følger:

∑/j,0,∞/(f(s(j)) ≤ ∑/j,0,∞/(f(s1(j))) <a

Vi har nå vist:

(As)(s: Nat –(1–1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a)

(ii) Anta (15) nêNat & s: n–(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t). Som i beviset for Lemma 12.3 kan man vise, gitt forutsetningene i teoremet, at

(16) C;<w,f>(h,x,t) = pD(K;w(h,x,t),f, *f*;0) Fra dette, (12) og definisjonen av S+ følger at Cd(C;<w,f>(h,x,t)) ≤Aleph;0. Er Cd(C;<w,f>(h,x,t)) =Aleph;0 kan vi argumentere som ovenfor. Er Cd(C;<w,f>(h,x,t)) <Aleph;0 må det finnes n1êNat og s1 alik at s1: n1–(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t). Fra dette, forutsetningene og Lemma 12.3 har man ∑/j,0,n1 –1/(f(s1(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, *f*;0). Fra dette, (11) og (15) følger ∑/j,0,n –1/(f(s(j)) ≤ ∑/j,0,n1 –1/(f(s1(j)) = S+(K;w(h,x,t),f, *f*;0) <a.

Vi har nå vist:

(16) (Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>
[(As)(s: Nat –(1–1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a) &
(As)(An)(1≤nêNat & s: n–(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t) –>
∑/j,0,n–1/(f(s(j)) <a)]))

Fra dette og (1) følger VE1. Dette viser at VE1 og VE2 er ekvivalente under de forutsetninger som er nevnt i satsen.

VE3 sier at det finnes en minste øvre grense a≥0 for mengden:

A0 = Mg(S+(K;w(h,x,t),f,*f*;0): Alt;w(h,x,t))).

Da finnes det selvfølgelig en øvre grense b>0 for A0. Dette innbærer at VE2 holder. Anta på den annen side at VE2 holder. Da har man at A0 er oventil begrenset. Siden S+ (K;w(h,x,t),f,*f*;0)≥0 for alle w,h,x,t der Alt;w(h,x,t) følger, siden A0 Inkl Reell, at det må finnes en minste øvre grense for A0 og at denne må være ≥0. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 12.5 Anta VE1 og at VE(f), ie. at f er en etisk verdifunksjon over klassen av utsagn. Anta videre at de følgende betingelser holder:

(i) M(X) & X Inkl K;w(h,x,t) & Cd(X)≥Aleph;0
(ii) (Ak)(kêX –> f(k)>0)
(iii) (Ak;1)(Ak;2)(k;1,k;2êX & k;1≠k;2. –> f(k;1)= f(k;2))
(iv) Alt;w(h,x,t)
(v) (Ey)(y= S(K;w(h,x,t),f, p;w(h,x,t)))

Da har man:

Cd[X Ω Mg(y: yêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)(y)>0)] < Aleph;0

Kommentar: Forutsetningene (i) – (v) sier at X er en tellbart uendelig mengde av mulige konsekvenser som har positiv verdi og der alle elementene har samme verdi. Dessuten impliserer disse forutsetningene at h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w og der man har at S(K;w(h,x,t),f, p;w(h,x,t)) eksisterer. Dette innebærer at den forventede verdien til h eksisterer. Konsekventen sier at klassen av alle de mulige konsekvensene som kan inntreffe om x fra og med t realiserer h i verdenen w der sannsynligheten er større enn 0 og som samtidig er med i X er endelig.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at forutsetningene i teoremet er oppfylt, men ikke desto mindre at man har:

(1) Cd[X Ω Mg(y: yêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)(y)>0)] ≥ Aleph;0

Da følger ved hjelp av velkjente mengdeteoretiske setninger at det finnes en funksjon s der man har:

(2) s: Nat –(1-1)–> X Ω Mg(y: yêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)(y)>0)

Nå har man om k er et vilkårlig element der

kêX Ω Mg(y: yêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)>0)

at f(k)>0 i lys av forutsetning (ii) og dessuten at kêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)>0.
Fra dette følger f(k)*p;w(h,x,t)>0 og derfor at kêC;<w,f>(h,x,t).

Vi har altså:

X Ω Mg(y: yêK;w(h,x,t) & p;w(h,x,t)(y)>0) Inkl C;<w,f>(h,x,t)

Fra dette og (2) følger videre:

(3) s: Nat –(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t)

Fra VE1 følger imidlertid eksistensen av a der man har:

(5) aêReell & a>0 samt:

(6) (Aw)(Ax)(At)(Ah)(Alt;w(h,x,t) –>
(As)(s: Nat –(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)))<a))

Fra (3),(6) og forutsetning (iv) følger: (7) ∑/j,0,∞/(f(s(j)))<a Fra (2) har man:

(8) (An)(nêNat –> s(n)êX) Fra dette og forutsetningene (ii) og (iii) har man i sin tur:

(9) (An)(nêNat –> f(s(n))>0) & (An)(nêNat –> f(s(n)) = f(s(n+1)))

Vi setter e0 = f(s(0)). Da e0>0 og det må dessuten finnes n0êNat slik at n0*e0>a.
Da må man imidlertid ha:

(10) ∑/k,0,n0–1/(f(s(k))) = n0*e0>a

Fra (7) følger imidlertid (11) ∑/k,0,n0–1/(v(s(k)) < ∑/j,0,∞/(f(s(j)))<a
Men (10) og (11) motsier hverandre. Antagelsen (1) leder derfor til en motsigelse. Det følger at satsen holder. **Q.E.D.**

I sammenheng med prinsippet er det nærliggende å nevne et annet beslektet prinsipp, nemlig:

VE4 VE(f) –> (Ea)(aêReell & a>0 &
(Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>
S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) <a))

Denne setningen sier at den forventede verdi til den positive delen av konsekvensene ved ethvert handlingsalternativ h alltid ligger under en bestemt positiv skranke a.

I forbindelse med denne setningen kan man i første omgang spørre om den er implisert av VE1. Dessuten kan man spørre om VE4 impliserer VE1. Vi skal først vise at VE1 impliserer VE4 under den forutsetning at:

(Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y=S(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))))

Man har altså:

Teorem 12.6 Anta VE1 holder og at

(Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y=S(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))))

Da gjelder VE4.

Bevis: Anta VE1 & VE(f) holder. Anta dessuten at

(0) (Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y=S(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))))

Fra VE1 følgerat det finnes a som oppfyller de følgende krav:

(1) aêReell & a>0

(2) (Ax)(At)(Ah)(Aw)(Alt;w(h,x,t) –>
[(As)(s: Nat –(1–1)–> C;<w,f>(h,x,t) –> ∑/j,0,∞/(f(s(j)) <a) &
(As)(An)(1≤nêNat & s: n–(1-1)–> C;<w,f>(h,x,t) –>

∑/j,0,n–1/(f(s(j)) <a)]))

Anta for vilkårlige w,h,x,t at (3) Alt;w(h,x,t). For å vise at VE4 holder er det tilstrekkelig å vise at S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) <a. Fra (3) og (0) følger:
(Ey)(y=S(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))). Fra dette og definisjonen av S følger videre:
(Ey)(y=S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))). Vi setter A = pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)). Fra definisjonen av S+ følger det da at det bare er tre muligheter når det gjelder A: Man kan ha A=ø, Cd(A)< Aleph;0 eller at Cd(A) = Aleph;0.

Tilfelle (i): A=ø. Da har man per definisjon at
S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) =0<a. Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Cd(A)<Aleph;0 & A≠ø. Da finnes π og nêNat &n≥1 slik at
(4) π: n–(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) og der man i tillegg har:
(5) S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) = ∑/k,0,n–1/(f(π(k))*p;w(h,x,t)(π(k)))
Fra (2), (3) og (4) følger:
(6) ∑/j,0,n–1(f(π(j)) <a i det man bemerker at C;<w,f>(h,x,t) er identisk med pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)). Nå har man: 0≤p;w(h,x,t)(π(k))≤1 for alle k≤(n–1). Det følger derfor at p;w(h,x,t)(π(k))*f(π(k)) ≤ f(π(k)) om k<n. Fra dette følger i sin tur:
∑/k,0,n–1/(f(π(k))*p;w(h,x,t)(π(k))) < ∑/j,0,n–1(f(π(j)) <a
Ved hjelp av (5) kan man herav slutte: S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t))<a. Dette viser at satsen også holder i dette tilfellet.

Tilfelle (iii): Cd(A) = Aleph;0. Da finnes det en funksjon s der man har:
s: Nat –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) og
(Ah)(h: Nat –(1-1,på)–> pD(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) –>
S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) = ∑/k,0,∞/(f(h(k))*p;w(h,x,t)(h(k))))
Fra definisjonen av C;<w,f>(h,x,t) følger ved hjelp av dette:
(7) s: Nat –(1-1,på)–> C;<w,f>(h,x,t) og
(8) S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) = ∑/j,0,∞/(f(s(j))*p;w(h,x,t)(s(j))))
Fra (2), (3) og (7) følger:
(9) ∑/j,0,∞/(f(s(j))) <a
Men siden 0≤p;w(h,x,t)(s(j)) ≤1 for alle jêNat har man:
(10) (Aj)(jêNat –> p;w(h,x,t)(f(s(j)))*f(s(j)) ≤ f(s(j))
Fra dette, (9) og velkjente setninger om uendelige rekker har man i lys av (8).
S+(K;w(h,x,t), f, p;w(h,x,t)) = ∑/j,0,∞/(f(s(j))*p;w(h,x,t)(s(j)))) <a. Dette viser at satsen også holder i dette tilfellet.
Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Vi har nå vist at VE4 er implisert av VE1 under den forutsetning som er nevnt i satsen. Imidlertid synes ikke VE4 å implisere VE1 innenfor rammen av KET1. Dette ville man ha bevist om man kunne fremvise en modell hvor KET1 og VE4 holder, men hvor likevel negasjonen av VE1 er gyldig. Å fremvise en slik modell er naturligvis et meget arbeidskrevende prosjekt og ikke spesielt hyggelig i lys av kompleksiteten til teorien KET1. Vi har derfor ikke gjort noe forsøk i denne retning. Uformelt kan man kanskje tillate seg å argumentere slik i stedet: Man ser nokså lett at beviset for Teorem 12.5 bryter sammen om man erstatter VE1 med VE4. La oss forkorte konjunksjonen av betingelsene (i) – (v) i dette teoremet med "F(X)" og konsekventen i teoremet "G(X)". Teorem 12.5 kan da sies å utrykke: VE1 –> (AX)(F(X) –> G(X)). Men siden beviset ikke lar seg gjennomføre om

VE1 erstattes med VE4 indikerer dette at (Ax)(F(X) –> G(X)) er implisert av VE1, men ikke av VE4. I så fall kan ikke VE4 implisere VE1 uten at vi kan utlede en motsigelse. I lys av slike overveielser kan det være et visst grunnlag for å tro at VE4 er genuint svakere enn VE1.

Det er nå passende å vise hvilken relevans tesene og teoremene som har blitt undersøkt ovenfor har for den problemstilling vi betraktet i §11.

La oss først bemerke at fra VE4 følger at mengden av alle S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) der man har Alt;w(h,x,t) er en oventil begrenset mengde av reelle tall. I lys av minste øvre grense-aksiomet i analysen følger det da at denne mengden har en minste øvre grense. Det bør også noteres at VE4 impliserer at S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) eksisterer om Alt;w(h,x,t). Man har altså at VE4 impliserer:

(Ey)(yêReell & y≥0 &
y= Sup(Mg(S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) : Alt;w(h,x,t))))

Det følgende teorem er relevant for betraktningene i §11 i det det viser at antesedenten i Teorem 11.1.1 ikke kan være oppfylt om VE(f) og man dessuten har at:

|f(d(t)| > æ og
æ = Sup(Mg(S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) : Alt;w(h,x,t)))

Teorem 12.7 (KET1) Anta VE(f) og at VE4 holder og at
æ = Sup(Mg(S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) : Alt;w(h,x,t)))
Anta dessuten at de følgende betingelser er oppfylt:

(i) Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t)
(ii) k: n+1 –(1-1) –> SN/i,1,2/(K;w(h;i,x,t)) & n≥1
(iii) f(k(0))<0 & n*v(k(1)) > |v(k(0))|>æ
(iv) (Ai)(0≤i≤n –> p;w(h;1,x,t)(k(i)) =1)
(v) (Ai)(0≤i≤n –> p;w(h;2,x,t)(k(i)) = 0)

Sett A0 = {k(0),.....,k(n)) og anta:

(vi) S(K;w(h;1,x,t)–A0,f,p;w(h;1,x,t)) = S(K;w(h;2,x,t)–A0,f,p;w(h;2,x,t))

Da har man:

¬(Ai)(Aj)(1≤i,j≤n –> f(k(i)) = f(k(j)) >0)

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og anta for reduktio ad absurdum at (+) (Ai)(Aj)(1≤i,j≤n –> f(k(i)) = f(k(j)) >0). Vi har på basis av aksiomene i KET1 at

(1) P:w(h;1,x,t) : K;w(h,1,x,t) –> [0,1]
(2) f" K;w(h;1,x,t) Inkl Reell

Fra forutsetning (ii) følger også:

(3) K;w(h;1,x,t) ≠ø

Sett A1 = A0–{k(0)}. Da har man:

(4) A1≠ø & A1 êPt(K;w(h;1,x,t)).

Dessuten følger, fra definisjonen av A0, (+) og forutsetning (iv):

(Ak)(kêA1 –> (f(k)*p;w(h;1,x,t)) >0)

Fra dette følger i sin tur at:

(5) A1ΩpD(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h;1,x,t)) = A1. Ved hjelp av Teorem 11.13 kan man da slutte:

(6) S+(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h,x,t)) =
∑/j,1,n/(f(k(j)*p;w(h;1,x,t)(k(j))) +S+(K;w(h;1,x,t)–A1,f,p;w(h,x,t))

siden eksistensen av S+(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h,x,t)) følger fra VE4.

Men fra (+) og forutsetning (iv) følger:

(7) ∑/j,1,n/(f(k(j)*p;w(h;1,x,t)(k(j))) =

$$\sum/j,1,n/(f(k(j))) = n*f(k(1)) > |v(k(0))| > æ.$$

Men (8) S+(K;w(h;1,x,t)–A1,f,p;w(h,x,t))≥0. Fra (6), (7) og (8) følger:

S+(K;w(h;1,x,t),f,p;w(h,x,t)) >æ. Men dette strider mot VE4 og den forutsetning at æ er den minste øvre grense for mengden
Mg(S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) : Alt;w(h,x,t)). Dette gir oss en motsigelse. Det følger at (+) ikke holder. **Q.E.D.**

Siden vi har, i lys av Teorem 12.4, at VE1 er ekvivalent med VE2 og VE3 gitt at

(++) VE(f) &(Ah)(Alt;w(h,x,t) –> (Ey)(y=S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t))))

og vi dessuten har at VE4 er implisert av VE1 gitt (++) følger det at teoremet ovenfor fortsatt holder om vi erstatter "VE4" med enten "VE1", "VE2" eller "VE3" dersom vi samtidtig legger til (++) som en ny forutsetning.

La oss nå kommentere hvordan sammenhengen er mellom VE4 og forutsetningene tok med i Teorem 11.1.1 i §11.

Anta at forutsetningene (i) – (xv) i Teorem 11.1.1 holder og anta i tillegg at

(a) VE4
(b) æ = Sup(Mg(S+(K;w(h,x,t),f,p;w(h,x,t)) : Alt;w(h,x,t)))
(c) (At)(têT –> |f(d(t))|>æ)

Da ser man at om man man i Teorem 12.7 setter k(0)=d(t) og videre antar at k(1) .... k(n) er identiske med henholdsvis m(q(0),t),....,m(q(n–1),t) så holder forutsetningene i Teorem 12.7. Det følger da at

¬(Ai)(Aj)(0≤i,j≤(n–1) –> f(m(q(i),t)) = f(m(q(j),t)) >0)

Men dette strider mot forutsetningene (iii) og (iv) i Teorem 11.1.1.

Det følger derfor at man ikke kan anta at (a) – (c) ovenfor holder og at alle forutsetningene (i) – (xv) i Teorem 11.1.1 er oppfylt uten at vi får en motsigelse. Holder man derfor fast ved teorien KET1 og (a) – (c) må man gi opp noen av disse forutsetningene.

§12.1 Et teorem i KET1+

Anta at w er en eller annen fiksert logisk mulig verden. La oss med livsløpet til et individ x i denne verdenen, L;(x,w), forstå den funksjonen som til ethvert tidspunkt t der det er slik at visse handlingsalternativer står åpne for x i verdenen w tilordner t det ordnede par hvor den første komponenten er mengden av alle de disse alternativene og hvor den andre komponenten er det av disse alternativene som x fra og med tidspunktet t realiserer i verdenen w. Dette innbærer at det følgende gjelder om L;(x,w): Er têDom(L;(x,w) har man at (L;(x,w));1 = Mg(h: Alt;w(h,x,t)) og (L;(x,w));2 = (ih)(Re;w(h,x,t)).

I det følgende lar vi "Q" betegne mengden Mg(<x,t>: (Eh)Alt;w(h,x,t)). La oss nå med en logisk mulig etikk i verdenen w forstå en funksjon som til ethvert par <x,t> der (Eh)Alt;w(h,x,t) tilordner en ikke-tom delmengde av
Mg(h: Alt;w(h,x,t)). Er ∏ en logisk mulig etikk i verdenen w er det meningen at ∏(x,t) representerer de handlingsalternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w og som etisk sett er tillatte ifølge etikken ∏. Inneholder ∏(x,t) bare ett alternativ vil dette alternativet følgelig være et som det x's etiske plikt ifølge ∏ å utføre fra og med tidspunktet t. Blandt alle de logisk mulige etikkene i w vil det være noen som muligens er totalt urimelige, andre som muligens er mer i harmoni med ens intuisjoner om hva som etisk sett er riktig og galt å gjøre i livets forskjellige situasjoner. Livsløpet til et individ x i verdenen w vil være i overenstemmelse med etikken ∏ i w hvis og bare hvis man har: (At)(têDom(L;(x,w)) –> (L;(x,w)(t));2 ê∏(x,t)). Med andre ord hvis og bare hvis det for ethvert tidspunkt der noen

alternativer står åpne for x er slik at det alternativet som x realiserer fra og med t er blandt dem som er tillatte ifølge etikken ∏. Gitt en logisk mulig verden w og en logisk mulig etikk ∏ i w er det i og for seg intet som forhindrer at ingen livsløp i verdenen w er fullt ut i oversenstemmelse med ∏.

La oss med den forventede verdi til handlingsalternativet h i verdenen w med hensyn på funksjonen f og paret <x,t> forstå S(K;w(h,x,t),f, P;w(h,x,t)). Anta h;1 og h;2 er to handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w. Vi sier da at h;1 er f-bedre enn h;2 for x relativt til <w,t> hvis og bare hvis den forventede verdien til h;1 i verdenen w med hensyn på funksjonen f og paret <x,t> er større enn den forventede verdien til h;2 i verdenen w med hensyn på funksjonen f og paret <x,t>. La oss endelig med mengden av de f-maksimale alternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w forstå mengden av alle de alternativene h som står åpne for x ved t i verdenen w og hvor det ikke finnes noen alternativer som står åpne for x ved t som er f-bedre enn h.

Gitt de begrepsdannelsene som nå er innført kan man nå stille det følgende problem som tilsynelatende har en viss teoretisk interesse:

Anta ∏ er en vilkårlig logisk mulig etikk i w. Er det da slik at det finnes en verdifunksjon π: U –> Reell som er slik at for alle par <x,t> som er med i domenet til ∏ har man at ∏(x,t) er identisk med mengden av de f-maksimale alternativene som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w?

Det er nokså klart at dette ikke holder generelt for enhver mulig verden w. Men for visse mulige verdener viser det seg at det faktisk holder under visse nærmere spesifiserbare betingelser. I denne sammenheng kan det være av interesse å betrakte det følgende teorem:

Teorem 12.1.1: (KET1+) Anta wêI. Anta videre at

(i) F = Mg(<<h,x,t>,μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))>: Alt;w(h,x,t))))

(ii) F: Dom(F) –(1-1)–> U

Anta at for alle h,x,t og w gjelder:

(iii) Alt;w(h,x,t) –> s;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) êMg(u: Kon;<x,h,w,t>(u))

og anta at for alle h,x,t,w gjelder:

(iv) Alt;w(h,x,t) –> P;w(h,x,t)(s;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))))=1

Anta dessuten for alle x,t at

(v) (Eh)(Alt;w(h,x,t) –>Max(w,x,t)≠ø)

og at det følgende holder for alle h,x,t:

(vi) Alt;w(h,x,t) –> (K;w(h,x,t)Ω(Rgn(F) –{F(<h,x,t>)} = ø)

Definer G;w(x,t) = Mg(h: Alt;w(h,x,t)) for alle têT . La ∏ være en funksjon som til ethvert par <x,t> der (Eh)(Alt;w(h,x,t)) tilordner en ikke-tom delmengde ∏(x,t) av G;w(x,t). Da finnes det en funksjon π: U –> Reell slik at følgende holder dersom <x,t>êDom(∏) :

(+) ∏(x,t) = Mg(h: hêG;w(x,t) & (Ah')(h'êG;w(x,t) –>
S(K;w(h,x,t),π,P;w(h,x,t)) ≥ S(K;w(h',x,t),π,P;w(h',x,t))))

Dette teoremet kan antagelig bare utledes i KET1+. Det virker tvilsom om noen tilsvarende sats kan utledes i KET2 eller KET2+. Egentlig er ser denne satsen mer komplisert ut enn den egentlig er. La oss først kommentere de enkelte forutsetningene i den: F er en funksjon som tilordner ethvert triple <h,x,t> der h er et alternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w utsagnet
μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))), med andre ord det utsagnet som uttrykker at x fra og med tidspunktet t realiserer alternativet h. Den andre forutsetningen sier direkte at denne

funksjonen er en-entydig. Denne forutsetningen er forholdsvis sterk. Det er heller ikke direkte evident at den holder. Men ved nærmere ettertanke tror jeg at den egentlig ikke er så urimelig. Den tredje og fjerde forutsetningen uttrykker den generelle påstand at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så beskriver utsagnet at x realiserer h fra og med t en mulig konsekvens som kan inntreffe gitt at x faktisk velger alternativet h ved tidspunktet t og at denne mulige konsekvens inntreffer med sannsynlighet lik 1. Man ser at forutsetningene (ii) og (iv) uttrykker hoved-tankene i det standpunkt som vi tidligere omtalte som "vid konsekvensialisme".
Den femte forutsetningen innebærer følgende, i lys av den definisjonen som tidligere har blitt gitt av "Max(w,x,t)": Klassen av de handlingsalternativer som står åpne for x ved tidspunktet t i verdenen w inneholder maksimale elementer med hensyn på "Minst like bra som"-relasjonen over denne mengden av handlingsalternativer dersom det finnes et handlingsalternaternativ som står åpent for x ved tidspunktet t. Den sjette forutsetningen er mer komplisert. Det den innebærer er at dersom h er et handlingsalternativ som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w så skal mengden av alle de mulige konsekvenser som kan inntreffe om x ved t realiserer h i verdenen w minus den konsekvensen som består i at x fra og med t realiserer h ikke ha noen felles elementer med Rgn(F)–{F(<h,x,t>)}. Med andre ord kreves det at:

(Ah')(Ax')(At')(Alt;w(h',x',t') & <h',x',t'>≠ <h,x,t> –>
¬(μ;-1(Mg(w: Re;w(h',x',t')))êK;w(h,x,t)))

Dette er en temmelig sterk forutsetning. Det kan diskuteres om den er helt realistisk. Hvis den ikke er det skulle det forsåvidt være klart at teoremet ovenfor vil ha en mer begrenset interesse. Endelig forutsettes det at ∏ er en funksjon som til ethvert par <x,t> der (Eh)Alt;w(h,x,t) tilordner en ikke-tom delmengde av Mg(h; Alt;w(h,x,t)). Konsekventen i teoremet sier at det finnes en verdifunksjon π som er slik at for alle par <x,t> der (Eh)Alt;w(h,x,t) har man at ∏(x,t) er identisk med mengden av alle de alternativer som står åpne for x ved t i verdenen w og som har størst forventet verdi med hensyn på funksjonen π relativt til <w,x,t>.

La oss nå gi et bevis for satsen:

Bevis: Anta at forutsetningene i teoremet holder. Da har man at wêI. I det følgende antar vi at w er helt fiksert. Vi kan åpenbart velge ut et reelt tall a der

(1) a>0. I lys av de verditeoretiske aksiomene i KET1+ har man at det finnes f;0 slik at :

(2) VE(f;0)

Vi må konstruere funksjonen π slik at det blir en funksjon som avbilder U inn i Reell. Er xê(U– Rgn(F)) setter vi ganske enkelt:

(3) π(x) = f;0(x).

Dermed er π definert for de x som inngår i U – Rgn(F). Man må imidlertid definere π for de utsagn som inngår i Rgn(F). For å kunne gjøre dette setter vi først per definisjon:

(4) Q = Mg(<x,t>: (Eh)Alt;w(h,x,t)

Vi definerer dernest et knippe av funksjoner f;<x,t>/<x,t>êQ/ der f;<x,t> avbilder Mg(h: Alt;w(h,x,t)) inn i U ved å sette:

(5) f;<x,t>(h) = F(<h,x,t>) = μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) forutsatt at hêMg(h: Alt;w(h,x,t)). Skulle man definere f;<x,t> helt eksplisitt kunne man gjøre det slik:

(5.1) f;<x,t> = Mg(<z,r>: (Eh)(Alt;w(h,x,t) &
z=h & r= μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t)))))

Gitt denne, mer eksplisitte, definisjonen av f;<x,t> skulle det være forholdsvis lett å bevise at Dom(f;<x,t>) = Mg(h: Alt;w(h,x,t)) og Rgn(f;<x,t>)Inkl U om <x,t>êQ. Videre er det klart at f;<x,t> er en-entydig. Det skulle heller ikke være spesielle problemer forbundet med å bevise at det følgende holder:

(6) UN/<x,t>êQ/(f;<x,t>"G;w(x,t)) = Rgn(F)

Man må her huske på at i lys av forutsetningene har vi

G;w(x,t) = Mg(h: Alt;w(h,x,t)).

Vi setter per definisjon:

(7) c;(x,t,f;0) = (iz)((Eh)(hêMax(w,x,t) & z = FV;<w,t>(x,h,f;0)))

Man kan da vise:

(8) (Ax)(At)(<x,t>êQ –> (Ey)(y= c;(x,t,f;0))).

Ved hjelp av Definisjon 11.17 og forutsetningene (iii) og (iv) kan man vise:

(9) (Ah)(hêG;w(x,t) –>
FV;<w,t>(x,h,f;0) = f;0(f;<x,t>(h)) +
S(K;w(h,x,t)–{f;<x,t>(h)},f;0,P;w(h,x,t)))

Man kan nå fullføre definisjonen av π:

(10.1) Anta <x,t>êQ. Det er da to muligheter: Har man at
hê(G;w(x,t) – ∏(x,t)) setter man:
(i) π(f;<x,t>(h)) = f;0(f;<x,t>(h))
Har man på den annen side at hê∏(x,t) setter man:
(ii) π(f;<x,t>(h)) = (c;(x,t,f;0) +a) –
S(K;w(h,x,t)–{f;<x,t>(h)},f;0,P;w(h,x,t))

I lys av (6) er π fullstendig definert. Vi har jo allerede definert π for alle z der zê(U–Rgn(F)). Er nå zêRgn(F) har man i lys av (6) at det må finnes et par <x,t> og en h slik at <x,t>êQ & z= f;<x,t>(h) og der man har Alt;w(h,x,t), mao. at hêG;w(x,t). Fra dette og definisjonen av π fremgår det at Dom(π)=U. Det er nødvendig å bevise at:

(‡) π: U –> Reell

Vi har allerede vist at Dom(π) = U. Det er derfor tilstrekkelig å vise at π(z)êReell om zêU. Anta derfor for vilkårlig z at zêU. Da har man enten at zê(U–Rgn(F)). I så fall har vi i lys av (3) ovenfor at π(z)= f;0(z)êReell siden f;0: U –> Reell. Anta på den annen side at zêRgn(F). Det følger da at det finnes q slik at <q,z>êF. Fra dette og forutsetning (i) i satsen, definisjonen av F, følger da at det finnes x,t,h der man har:

(11) Alt;w(h,x,t) & q= <h,x,t> & z= μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))

Fra dette og definisjonen av f;<x,t> følger:

(12) f;<x,t>(h) = F(<h,x,t>) = μ;-1(Mg(w: Re;w(h,x,t))) = z

Fra dette følger z= f;<x,t>(h). Videre følger fra (11) og definisjonen av Q at <x,t>êQ. Er nå hê(G;w(x,t) – ∏(x,t)) har man i lys av (10.1) at

(13) π(z) = π(f;<x,t>(h)) = f;0(f;<x,t>(h)) = f;0(z)êReell

(‡) holder derfor i dette tilfellet. Anta på den annen side at hê∏(x,t). Da har man ved hjelp av (10.1) at:

(14) π(z) = π(f;<x,t>(h)) = (c;(x,t,f;0) +a) – p

der p = S(K;w(h,x,t)–{f;<x,t>(h)},f;0,P;w(h,x,t)). Men pêReell. Det følger derfor at man også i dette tilfellet naturligvis har π(z)êReell. Dette viser at (‡) holder.

For å gi et fullstendig bevis for satsen må man imidlertid også vise:

(++) ∏(x,t) = Mg(h: hêG;w(x,t) & (Ah')(h'êG;w(x,t) –>
S(K;w(h,x,t),π,P;w(h,x,t)) ≥ S(K;w(h',x,t),π,P;w(h',x,t))))

(A) Vi gir først et bevis for inklusjonen mot høyre. Anta derfor for vilkårlig h at (15) hê∏(x,t). Fra dette og en av forutsetningene i teoremet følger at

(16) hêG;w(x,t).

Anta nå for vilkårlig h' at (17) h'êG;w(x,t). Det er da to muligheter:

Tilfelle (i): h'ê∏(x,t). I dette tilfellet har man i lys av (10.1) at:

(17) $\pi(f;<x,t>(h)) = (c;(x,t,f;0) + a) - S(K;w(h,x,t)-\{f;<x,t>(h)\},f;0,P;w(h,x,t))$

Nå har man i lys av forutsetningene (iii) og (iv) og definisjonen av operasjonen S, siden $f;<x,t>(h') = \mu;-1(Mg(w: Re;w(h',x,t)))$ at:

(18) $S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t)) = \pi(f;<x,t>(h')) + S(K;w(h',x,t)-\{f;<x,t>(h')\},\pi,P;w(h',x,t))$

I lys av forutsetning (vi) i teoremet har man:

(19) $S(K;w(h',x,t)-\{f;<x,t>(h')\},\pi,P;w(h',x,t)) = S(K;w(h',x,t)-\{f;<x,t>(h')\},f;0,P;w(h',x,t))$

Fra dette, (10.1) og (18) følger:

(20) $S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t)) = \pi(f;<x,t>(h')) + S(K;w(h',x,t)-\{f;<x,t>(h')\},\pi,P;w(h',x,t)) = c;(x,t,f;0) + a$

Siden hê∏(x,t) har man på tilsvarende vis:

(21) $S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) = c;(x,t,f;0) + a$

Det følger at $S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) \geq S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t))$ i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): h'ê(G;w(x,t) –∏(x,t)). Det er da formålstjenlig å skille mellom to undertilfelle: (a) h'êMax(w,x,t). I så fall har man i lys av (7) ovenfor at:

(22) $c;(x,t,f;0) = FV;<w,t>(x,h',f;0) = S(K;w(h',x,t),f;0,P;w(h',x,t)) = f;0(f;<x,t>(h')) + S(K;w(h',x,t)-\{f;<x,t>(h')\},f;0,P;w(h',x,t))$

I dette tilfellet har vi i lys av (10.1) at $\pi(f;<x,t>(h')) = f;0(f;<x,t>(h'))$. Det følger ved hjelp av dette og forutsetning (vi) at:

(23) $c;(x,t,f;0) = S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t))$

Siden hê∏(x,t) har man som ovenfor at $S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) = c;(x,t,f;0) + a$. Man må derfor også i dette tilfellet ha

$S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) \geq S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t))$

(b) Er ¬(h'êMax(w,x,t)), men hêG;w(x,t) har man

(24) $FV;<x,t>(x,h',f;0) < c;(x,t,f;0) < c;(x,t,f;0) + a$

På samme måte som ovenfor viser man at

$FV;<w,t>(x,h',f;0) = S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t))$ og at

$S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) = c;(x,t,f;0) + a$ Det følger at påstanden holder også i dette tilfellet.

(B) Vi må nå vise at inklusjonen mot venstre i (++) holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes h der man har:

(25) $hêG;w(x,t) \;\&\; (Ah')(h'êG;w(x,t) \rightarrow S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) \geq S(K;w(h',x,t),\pi,P;w(h',x,t)))$

og (26) ¬(hê∏(x,t)).

Nå har man ved hjelp av forutsetningene om ∏ at ∏(x,t)≠ø. Det finnes derfor h;0 slik at (27) h;0ê∏(x,t). Det følger da siden ∏(x,t) Inkl G;w(x,t) at h;0êG;w(x,t) og derfor ved hjelp av (25) at:

(28) $S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) \geq S(K;w(h;0,x,t),\pi,P;w(h;0,x,t))$

Siden h;0ê∏(x,t) har man

(29) $S(K;w(h;0,x,t),\pi, P;w(h;0,x,t)) = c;(x,t,f;0)+a$

På den annen side har man ved hjelp av (10.1) at

(30) $S(K;w(h,x,t),\pi,P;w(h,x,t)) \leq c;(x,t,f;0)$ om hê(G;w(x,t) – ∏(x,t))

(29) og (30) strider åpenbart mot (28). Dette viser at inklusjonen mot venstre holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

§13 Avslutning.

Vi har i dette arbeidet spesifisert i en helt formalisert form en familie av konsekvensetiske teorier. Hovedteorien var KET1. Vi betraktet også en modifikasjon av denne teorien, KET2, og dessuten visse relaterte, men sterkere teorier: KET1+ og KET2+. Et viktig spørsmål, men også meget vanskelig spørsmål er i hvilken grad disse teoriene, om noen av dem, representerer holdbare eller akseptable standpunkter. Et annet viktig spørsmål er hvilke resultater vi har kommet frem til og hvor viktige disse resultatene er. Et tredje spørsmål er hvordan, i hvilken grad og i hvilken retning dette arbeidet kan videreføres. Vi skal som avslutning forsøke å gi noen tentative svar på disse tre spørsmålene.

La oss starte med det andre spørsmålet som angår hvilke resultater vi har kommet frem. Det første som da kan sies er at vi ved å spesifisere de nevnte teorier forsåvidt har vist at visse etiske teorier kan formaliseres innenfor en språkramme av den art vi har angitt helt nøyaktig, viz. L;ê[Δ;2]. I seg selv er ikke dette helt opplagt. Og dette er også viktig. Det er viktig av flere grunner: For det første vil en slik helt eksplisitt formulering av en teori gjøre det lettere for kritisk innstilte personer å finne svakheter. Man ser letter nøyaktig hvilke påstander det er som inngår i teorien og også hva de kan implisere innenfor teoriens ramme. Viktig i denne forbindelse er at en slik fremstillingsmåte gjør det klart hvilke påstander det er innenfor teoriens språkramme det er som ikke bevises og hvilke det er som bevises. Når det gjelder. f.eks. teorien KET1 har vi angitt helt nøyaktig hvilke formuleringer det er som er ikke-logiske aksiomer og det skulle også klart fremgå av vår fremstilling hvilke av disse vi ikke har gjort noe forsøk på å bevise. For det andre gjør en slik eksplisitt fremstillingsmåte det lettere å undersøke hvorvidt en teori er konsistent eller ikke og hvordan de enkelte aksiomer i teorien er relatert til hverandre, f.eks. om noen av aksiomene er implisert av noen av de andre. I denne forbindelse kan det nevnes at vi er av den mening at teorien KET1 – og forøvrig de andre teoriene – er konsistente relativt til ZFCu(L;ê). Men det bør da med en gang bemerkes at dette ikke er et resultat vi har bevist.

Når det gjelder resultater forøvrig er disse representert ved de teoremene vi har bevist. Av disse synes de resultatene vi har lagt frem i forbindelse med de verditeoretiske aksiomene – og som også viser hvordan disse kan svekkes – å være blandt de viktigste. Men vi vil også nevne resultatene i §9 – §12 som viktige for en forståelse av teorien KET1. Også resultatene i forbindelse de verditeoretiske antagelsene VE1 – VE4 i §12 kan gjøre krav på en viss oppmerksomhet.

La oss dernest ta for oss spørsmålet om i hvilken grad teoriene vi har betraktet representerer holdbare eller akseptable standpunkter. I denne sammenheng kan det være naturlig å starte med KET1. Når man skal vurdere en slik teori kan det være hensiktsmessig å inndele vurderingen i to trinn. For det første kan man stille spørsmål ved språket til KET1, altså L;ê[Δ;2] som ble definert i §1. Man kan spørre om predikatene som inngår i dette språket virkelig er meningsfulle eller om det bare tilsynelatende er slik. Dette vil være avgjørende for ens vurdering av KET1. For kan man vise at et av disse predikatene, f.eks. sannsynlighetspredikatet "z er sannsynligheten for at k inntreffer gitt at x ved tidspunktet t realiserer alternativet h i verdenen w", ikke gir noen klar mening følger det at alle de setningene i språket som inneholder dette predikatet heller ikke gir noen klar mening. Store deler av teorien vil da falle vekk som noe man ikke fornuftigvis kan spørre om sannheten eller usannheten til. I det store og hele virker det ikke ufornuftig å hevde at de primitive

predikatene i L;ê[Δ;2] gir mening. I det minste har vi ikke sett, eller selv vært i stand til å konstruere, noen virkelig overbevisende argumentasjon til fordel for at de enkelte primitive predikater i dette språket virkelig er meningsløse. Men dette er ikke noe ukontroversielt standpunkt. Når det gjelder de verdipredikatene som det opereres med i L;ê[Δ;2] som eksempelvis "x er et utsagn som beskriver et forhold som har positiv indre verdi i seg selv", "x er et utsagn som beskriver et forhold som har negativ indre verdi i seg selv", osv. er det ikke opplagt at disse har noen klar vitenskapelig mening. På den annen side synes man å ha en del forholdsvis klare intuisjoner i forbindelse med setninger som inneholder disse predikatene. Men det virker naturlig nok usannsynlig at man skal kunne oppnå noen stabil og allmenn enighet om alle de mulige påstander om verdier som kan formuleres i L;ê[Δ;2].

Ved vurderingen av KET1 og de andre teoriene som har blitt spesifisert må man naturligvis også vurdere aksiomene i teorien. Når det gjelder den rent logiske delen av teorien, som forøvrig er felles for alle teoriene vi har nevnt, utgjøres denne av et standard aksiomsett for vanlig kvantifikasjonsteori med identitet. Denne delen av teorien synes derfor temmelig ukontroversiell. Det samme gjelder i noen grad, men ikke helt den samme grad, for de mengdeteoretiske aksiomene, ZFCu-aksiomene i L;ê[Δ;2] som også er felles ingredienser i våre teorier. Selvom ZFC er, såvidt jeg kan se, et allment respektert mengdeteoretisk system, er det ikke dermed sagt at dette system, eller utvidelser av det, nødvendigvis er et allment akseptert system, eller at det for all fremtid vil være det. Men det synes å være en fornuftig basis i enhver teori hvor man har behov for å omtale mengder, relasjoner og andre rent matematiske strukturer slik vi har gjort det her. Felles for alle de teoriene vi har betraktet her er også de aksiomene som inngår i egenskapsteorien E;3. Dette er ikke uten videre noen ukontroversiell teori, men hvis man aksepterer meningsfullheten til predikatene (0.3) – (0.8) i §1 tror jeg ikke man uten videre kan avvise at U1 – U4 og E1 – E7 kan oppfattes som et fornuftig (om ikke nødvendigvis fullstendig) aksiomsett for disse predikatene. Vi henviser i denne forbindelse leseren til diskusjonen av dem i Rognes [2], [3] og forøvrig i andre av våre arbeider.

La oss nå kort si noen ord om plausibiliteten til de aksiomene i KET1 som angår predikatene (1) – (12) i §1, gitt at man aksepterer disse som meningsfulle. Endel av disse aksiomene, som for eksempel de tidsteoretiske aksiomene AKE1 – AKE5, virker temmelig uskyldige og derfor fornuftige å ta med om man er villig til å arbeide med et såpass forenklet syn på tid som det vi har lagt til grunn her. Det samme gjelder AKE6 – AKE14 som også virker forholdsvis trivielle og ukontroversielle. Av de sannsylighetsteoretiske aksiomene er det vanskelig å se annet enn at ASN2 –ASN7 egentlig er svært rimelig. Derimot kan kanskje ASN1 drøftes mer enn vi har gjort. Når det gjelder de verditeoretiske aksiomene VER1 – VER4 utgjør de en etter vår mening temmelig sterk og kontroversiell teori. Men de behøver ikke uten videre å være uten enhver plausibilitet om man aksepterer predikatet "f er en etisk verdifunksjon over mengden av utsagn". Det virker imidlertid ikke uberettiget å si at de sammen med de øvrige aksiomene –, vi tenker på dem som allerede er nevnt, aksiomene om forventet verdi og vekt, samt hovedaksiomene i teorien – utgjør et interessant premiss-sett som det er meningsfullt og viktig å avklare implikasjonene til. Når det gjelder de resterende aksiomene i teorien, de om forventet verdi og vekt: AFV1 – AFV12, samt hovedaksiomene ATB1 – ATB3 utgjør disse så og si selve "motoren" i teorien. Den samme vurdering som ved de verditeoretiske aksiomene virker berettiget her. Sammen med de verditeoretiske aksiomene utgjør de etter vår mening et interessant premiss-sett som det er verdt å undersøke. Men de kan neppe sies å representere et knippe av selvinnlysende sannheter. Bemerkninger av lignende karakter som dem som her er fremsatt i forbindelse med KET1 kan også fremlegges i forbindelse med de andre teoriene vi har kommentert: KET2, KET1+ og KET2+.

La oss tilslutt si noen ord om hvordan dette arbeidet kan videreføres. For det første er det klart at det er mulig fra en rent matematisk og logisk synsvinkel å utføre en enda dypere undersøkelse av de teoriene som har blitt fremlagt enn den vi har foretatt. Delvis kan man utvikle de foreslåtte teoriene mer ved å forsøke å utlede satser av en mer sofistikert og avansert art enn dem vi har nevnt. Delvis kan man undersøke mer grundig enn det som er gjort så langt rent metalogiske problemstillinger. For eksempel kan man studere i større detalj de konsistens og uavhengighetsproblemer teorien reiser. For det andre er det klart at man kan forsøke å forbedre teoriene. Det er ikke utelukket at man kan gi andre og bedre definisjoner av forventet verdi enn den vi har sett på. Det er heller ikke utelukket at svakere teorier kan være mer fruktbare enn dem som har blitt presentert.

En annen retning som dette arbeidet kan videreføres i er å undersøke hva slags relasjoner det er mellom den typen konsekvensetiske teorier som har blitt studert her og deontiske logikker av forskjellig art. Det ville i høyeste grad være av interesse å studere mulige sammehenger her og hva slags sammenhenger det eventuelt kan dreie seg om.

En tredje retning som dette arbeidet kan videreføres i er å undersøke hvordan teorier av den typen vi har studert kan anvendes ved mer konkrete normative problemstillinger, kort sagt hvordan teorier av denne art kan fungere som premissmateriale ved praktisk orientert normativ argumentasjon.

La oss tilslutt nevne følgende. KET1 er et eksempel på en normativ teori. Primært sier den noe om under hvilke omstendigheter et handlingsalternativ er bedre enn et annet. Men teorien kan også anvendes deskriptivt. Dette innebærer at man kan anta at en person er rasjonell og handler konsekvent på basis av de prinsipper som inngår i teorien, med andre ord handler på grunnlag av den type beslutningsteoretiske kalkyle som er bygd inn i teorien. Ved ytterligere å utvide språket L;ê[Δ;2] med de predikatene som inngår i teorien om handlinger og handlingsalternativer om er beskrevet i Rognes [7] og dessuten utvide språket med de predikatene som inngår i teorien om tro og viten som er gitt i Rognes [9] får man en langt rikere begrepsramme. Innenfor denne rammen er det ikke bare mulig å utvikle en rent etisk teori, men også en mer omfattende teori om hvordan en rasjonell person vil handle gitt de trosoppfatninger som vedkommende har om hvilke handlingsalternativer som står åpne, hvilke mulige konsekvenser som kan inntreffe ved disse alternativene, og med hvilken sannsynlighet, samt hvilken verdi disse konsekvensene har. Det vil imidlertid føre for vidt å komme detaljert inn på dette her.

Referanser

Referanser

Baune [1]	Baune, Øyvind. *Språk, logikk og argumentasjonsteori.* 7. utgave. Oslo: 1993.
Baune [2]	Baune, Øyvind. *Vitenskap og metode.* 6. reviderte utgave. Oslo: 1993.
Bergsstrøm [1]	Bergstrøm, Lars. *The Alternatives and Consequences of Actions* Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1966.
Føllesdal et al [1]	Føllesdal, D. og Elster, J og Walløe, L. *Argumentasjonsteori, språk og vitenskapsfilosofi.* Oslo: Universitetsforlaget, 4. utgave, 1986.
Halldén [1]	Halldén, Søren. *On the Logic of "Better"* Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1957.
Hansson [1]	Hansson, Bengt. "Choice structures and preference relations". *Synthese* 18 (1968), 443–458.
Hansson [2]	Hansson, Bengt. "Fundamental Axioms for Preference Relations". *Synthese* 18 (1968), 423–443.
Ofstad [1]	Ofstad, Harald. Innledning til*Bentham, Mill, Rawls. Moral og nytte.* (edited by Eivind Storheim), pp. I –XLV. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag, 1970.
Prawitz [1]	Prawitz, Dag. "Utilitarism och alternativer til handlingar". In *Sanning, Dikt, Tro. Til Ingmar Hedenius.* (edited by Ann-Mari Henchen-Dahlquist), pp. 251 – 254. Stockholm: Bonniers, 1968.
Rognes [1]	Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Upublisert manuskript, 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten. *En teori om presise deskriptive utsagn*. Upublisert manuskript, 1985.
Rognes [3]	Rognes, Morten. *Egenskaper. Del I*. Upublisert manuskript, 1986.
Rognes [4]	Rognes, Morten. *En generell teori om etiske normer.* Upublisert manuskript, 1990.
Rognes [5]	Rognes, Morten. *ZFC og eksistensen av urindivider. Noen konsistensresultater.* Upublisert manuskript, 1986.
Rognes [6]	Rognes, Morten. *Livsløp, utvalgsstrukturer og ordningsrelasjoner*. Upublisert manuskript, 1980.
Rognes [7]	Rognes, Morten. *En teori om handlinger og handlingsalternativer*. Upublisert manuskript, 1994.
Rognes [8]	Rognes, Morten. *Determinisme og frihet. Noen logiske betraktninger*. Upublisert manuskript, 1994.
Rognes [9]	Rognes, Morten. *Teorien om presise deskriptive utsagn, modallogikk og intensjonal finstruktur.* Upublisert manuskript,

1996.

APPENDIX I

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

I dette tillegget vil det bli gitt en kortfattet beskrivelse av det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L) der L er et første-ordens språk som enten er identisk med L;e, eller en utvidelse av dette språk med nye ikke-logiske predikatkonstruksjoner.

Det bemerkes at L;e er det første-ordens språket som ved siden av de logiske konstruksjonene: –>, ¬, v, &, <–>, A, E og =, utelukkende inneholder de to ikke-logiske predikatkonstruksjonene "xêy", som leses "x er et element i mengden y", og"M(x)" som leses "x er en en mengde".

I det følgende må man derfor anta at L enten er L;e eller en utvidelse av dette språket med visse nye ikke-logiske predikater.

La DêFm(L). Da sies D å være et *setningslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes formler A,B og C i L slik at D er identisk med en av de følgende formler:

(1) A–>(B–>A)
(2) (¬B–> ¬A) –> (A –>B)
(3) (A–>(B–>C)) –> ((A–>B) –> (A–>C))

D sies å være et *predikatlogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det enten finnes formler A,B i L og variabeltegn x,y i L og B er nøyaktig som A unntatt eventuelt ved å ha y som fri variabel på et eller flere steder hvor A har x som fri variabel og D er :

(4) (Ax)A–> B

eller det er slik at det finnes formler A,B i L og et variabeltegn x der x ikke forekommer fritt i B og hvor D er identisk med den følgende formel:

(5) (Ax)(B–>A) –> (B –> (Ax)A)

Tilslutt sies D å være et *identiteslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes et variabeltegn x i L og D er formelen:

(6) (Ax)(x=x)

eller det finnes variabeltegn x,y i L og formler A,B i L der B er som A bortsett eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor B har en fri forekomst av x og D er den følgende formel:

(7) x=y –> (A <–> B)

Et *logisk* aksiom i L er da en formel i L som enten er et setningslogisk aksiom, et predikatlogisk eller et identitetslogisk aksiom i L.

De følgende formler i L kalles henholdsvis for mengdeaksiomet, urmengdeaksiomet, ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengdeaksiomet, parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, fundierungsaksiomet og utvalgsaksiomet i L:

M1 (Ax)(Ay)(xêy –> M(y))
M2 (Ey)(M(y) & (Ax)(xêy <–> ¬M(x)))
M3 (Ax)(Ay)(M(x) & M(y) & (Ez)(zêx)& (Ez)(zêy) &
(Az)(zêx <–> zêy) –> x=y)
M4 (Ey)(M(y) & ¬(Ez)(zêy) & (Aw)(M(w) &¬(Ez)(zêw). –> w=y))
M5 (Ay)(Az)((Ex)(M(x) & (Aw)(wêx <–> (w=y v w=z))))
M6 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (Ew)(zêw & wêx))))
M7 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (M(z) & (Aw)(wêz –> wêy)))))
M8 (Ex)(M(x) & (Ay)(M(y) &¬(Ez)(zêy) –> yêx) &
(Az)(M(z)&zêx –> (Ew)(M(w) & wêx & (Ar)(rêw <–> r=z))))
M9 (Ax)(M(x) &(Ew)(wêx) –> (Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy &zêx)))
M10 M(x) & (Ay)(yêx –> (M(y)&(Ez)(zêy))) &
(Ay)(Az)(y,zêx & y≠z –> ¬(Ew)(wêy &wêz)) –>
(Ez)(M(z) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêy &rêz &(At)(têy &têz –> t=r))))

I tillegg til disse formlene som nå har blitt nevnt sies A å være et replacement-aksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B i L som har x og y som fri variabler og der variablene w og w' ikke forekommer fri og hvor A er identisk med formelen:

M11 (Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) & B(x,z) –> y=z) & M(w) –>
(Ew')(M(w') & (Ax)(xêw' <–> (Ey)(yêw & B(y,x))))

Tilslutt sies A å være et utsondringsaksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B som ikke inneholder x og y som fri variabler og A er identisk med den følgende formel:

M12 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & B)))

Det mengdeteoretiske system ZFCu(L) er nå den første-ordens teorien i L hvis logiske aksiomer er alle de logiske aksiomene i L slik disse har blitt definert ovenfor og der de ikke-logiske aksiomene i L er M1 – M10 samt alle utsondrings- og replacement-aksiomer i L. Slutningsreglene i teorien er utelukkende modus ponens og universell generalisering.

Dette system er detaljert beskrevet i Rognes [1]. Der er det også gitt detaljerte definisjoner av alle de rent mengdeteoretiske begrepene som vi vil benytte oss av i forbindelse med denne teorien.

Det kan være passende å fremsette to bemerkninger helt tilslutt. Fra aksiomlisten M1 – M12 ser man at aksiomene M3 – M10 og aksiomskjemaene M11 og M12 er de vanlige aksiomene i ZFC. Men siden våre variabler er generelle og vi har føyd til mengdepredikatet M(x) blir formuleringen av de enkelte aksiomer litt annerledes enn vanlig. Aksiomene M1 og M2 sier henholdsvis at noe er et element i noe annet bare om det siste er en mengde og at det finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de entiteter som er ikke-mengder, dvs. de såkalte urindivider. Det sistnevnte aksiom blir mer utførlig diskutert i Rognes [5] og [6] og leseren anbefales å konsultere disse to arbeidene om det ønskes mer informasjon om denne versjonen av Zermelo- Fraenkel systemet.

Det skulle være klart at om L' er en utvidelse av L som i sin tur er en utvidelse av L;e så er mengden av de logiske aksiomene i L' ikke identisk med mengden av de logiske aksiomene i L. Dette har sin bakgrunn i følgende forhold. Utvides L til L' vil L' inneholde konstruksjoner som ikke foreligger i L. De formlene som inneholder disse nye konstruksjonene kan da ikke være formler i L. La A;0 være en slik formel i L' og B;0 en annen slik formel. Da vil f.eks.

A;0 –>(B;0–>A;0) være et logisk aksiom i L'. Men denne formelen er ikke en formel i L og kan da heller ikke være noe logisk aksiom i L. Det samme gjelder de andre logiske aksiomskjemaene.

En lignende bemerkning kan også fremsettes i forbindelse med replacementaksiomene og utsondringsaksiomene. Er L' en genuin utvidelse av L vil f. eks. klassen av utsondringsaksiomer i L' inneholde klassen av utsondringsaksiomene i L som en ekte delmengde. For anta A;0 er en formel i L' som ikke er med i L og anta at A;0 er lukket. Anta videre at B er en formel i L der variablene x,y ikke forekommer fri. Da er A;0&B en formel i L', men ikke noen formel i L og den følgende formel er derfor et utsondringsaksiom i L', men ikke i L:

(Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & A;0&B))))

Lignende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med replacementaksiomet, dvs. aksiomskjemaet M12.

***